

Sumario

SUMARIO	1
A. ANEXO A: CONTACTO ENTRE NEUMÁTICO Y SUELO, ANÁLISIS Y SOLUCIÓN EMPLEADA EN VISUAL NASTRAN	3
A.1. Cinemática.....	4
A.2. Dinámica.....	8
A.3. Sistema con cinemática equivalente.....	10
A.4. Sistema con dinámica equivalente.....	13
B. ANEXO B: ENLACES EN VISUAL NASTRAN	19
B.1. Manera de implementar los enlaces	19
B.2. Enlaces disponibles en <i>Visual Nastran</i>	20
B.2.1. Junta rígida.....	20
B.2.2. Junta rígida en una guía	21
B.2.3. Junta rígida en un plano	22
B.2.4. Junta de revolución	23
B.2.5. Junta de revolución en una guía	24
B.2.6. Junta de revolución en un plano.....	25
B.2.7. Junta esférica	26
B.2.8. Junta esférica en una guía	27
B.2.9. Junta esférica en un plano.....	28
B.2.10. Cuerda.....	29
B.2.11. Separador.....	30
B.2.12. Barra	31
B.2.13. Junta paralela.....	32
B.3. Otros tipos de unión entre sólidos.....	33
B.3.1. Muelle/amortiguador lineal.....	33
B.3.2. Muelle/amortiguador de revolución	34
B.3.3. Actuador lineal.....	35
B.3.4. Actuador de revolución	36
C. ANEXO C: ECUACIONES GEOMÉTRICAS Y MECÁNICAS DE LOS MODELOS IMPLEMENTADOS EN VISUAL NASTRAN	37
C.1. Ecuaciones geométricas	37
C.2. Ecuaciones dinámicas.....	44





A. Anexo A: Contacto entre neumático y suelo, análisis y solución empleada en *Visual Nastran*

Desde el punto de vista cinemático se simplifica el contacto de la rueda con el suelo de manera que ésta se puede representar como una circunferencia (Fig. A.1). Desde el punto de vista dinámico, las consideraciones son las siguientes: el centro de inercia G de la rueda está en el centro geométrico de la circunferencia que la representa cinemáticamente. La distribución de masa en la rueda es simétrica respecto al plano que contiene la circunferencia y posee simetría radial respecto a todos los puntos de su eje. En la realidad esto no sucede exactamente así debido a deformaciones de las partes elásticas, presencia de componentes asimétricos (elementos del sistema de frenado o del sistema motriz) o pequeñas imprecisiones en la fabricación, pero es una aproximación.

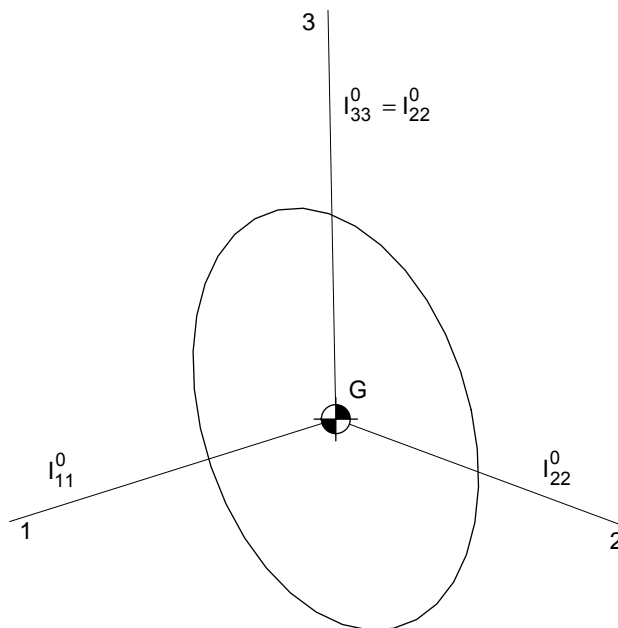


Fig. A.1 Rueda representada geométricamente como una circunferencia.

Debido a estas simetrías en la distribución de masa, el tensor central de inercia tiene la siguiente forma en una base cuyo versor 1 es perpendicular al plano de la circunferencia (Fig. A.1):



$$[I_G] = \begin{bmatrix} I_{11}^o & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^o & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11}^o & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^o & 0 \\ 0 & 0 & I_{22}^o \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

A.1. Cinemática

Para analizar cinemáticamente el contacto rueda suelo, se define como referencia de estudio una solidaria al suelo en la que se puede definir una base fija B (Fig A.2). La orientación de una rueda en esta referencia se expresa mediante los siguientes ángulos de Euler: Un primer ángulo ψ de orientación de la rueda correspondiente a una rotación respecto a un eje vertical. Un segundo ángulo θ de inclinación de la rueda correspondiente a una rotación respecto al diámetro horizontal de la rueda (orientación fijada por ψ). Un tercer ángulo ϕ de rotación de la rueda respecto a su eje (orientación fijada por ψ y por θ).

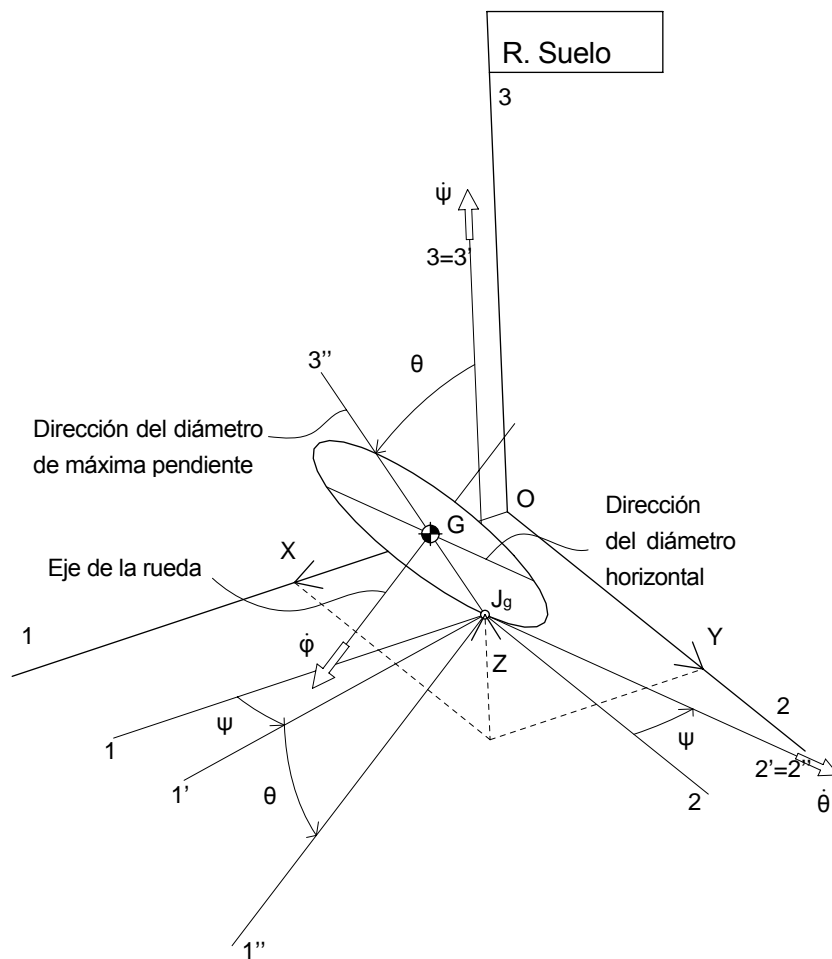


Fig. A.2 Posición y orientación de una rueda en el espacio. Bases asociadas a la rueda.



La base de estudio B' se elige de manera que su eje 3' tiene dirección vertical, el 2' tiene la dirección del diámetro horizontal y el 1' forma triedro directo con los dos anteriores. La característica de esta base es que su versor 2' tiene la dirección del diámetro horizontal de la rueda (o dirección de rodadura). La orientación de esta base respecto a la base B se puede expresar mediante el ángulo de Euler ψ empleado para definir la orientación de la rueda.

La base de estudio B'' se elige de manera que su eje 3'' tiene la dirección del diámetro de máximo pendiente de la rueda, el 2'' tiene la dirección del diámetro horizontal y el 1'' forma triedro directo con los dos anteriores. Esta base tiene la característica que el versor 1'' tiene la dirección del eje de la rueda y el tensor de inercia mantiene sus componentes constantes con la forma de la ecuación A.1. La orientación de esta base respecto a la base B se puede expresar mediante los ángulos de Euler ψ y θ empleados para definir la orientación de la rueda.

Las velocidades angulares de las bases B' y B'' respecto a la referencia suelo se pueden expresar en cada base con los siguientes vectores:

$$\{\Omega_{\text{Suelo}}^{B'}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\{\Omega_{\text{Suelo}}^{B''}\}_{B''} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi} \cdot \sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cdot \cos\theta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Y la velocidad angular de la rueda respecto al suelo, expresada en la base B'' es:

$$\{\Omega_{\text{Suelo}}^{\text{Rueda}}\}_{B''} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \cdot \sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cdot \cos\theta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

La diferencia entre la orientación de la base B'' y la de la rueda corresponde al ángulo ϕ que la rueda puede rotar respecto a su eje. El valor concreto de esta rotación es irrelevante en cuanto a la geometría, ya que no afecta a ningún otro componente de la motocicleta y lo único que importa desde el punto de vista dinámico es la velocidad de rotación $\dot{\phi}$.



Para expresar la configuración de la rueda sin considerar la rotación alrededor de su eje se toman como coordenadas independientes: los ángulos de Euler ψ y θ definidos anteriormente y las tres componentes del vector de posición del punto geométrico de la rueda con distancia al suelo mínima (J_g), respecto a un punto fijo arbitrario de la referencia (punto O). En el caso particular de que la rueda esté manteniendo contacto con el suelo, J_g es el llamado punto geométrico de contacto. Si se quisiera considerar la rotación propia de la rueda se habría de añadir como coordenada independiente el ángulo ϕ .

Así, en la figura A.2 el vector que posiciona el punto J_g respecto al punto O, expresado en la base B es:

$$\{\overline{OJ_g}\}_B = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (A.5)$$

Y definimos estas tres componentes x , y , z como coordenadas generalizadas de posición para el punto J_g .

La velocidad del punto J_g se puede hallar mediante la derivada temporal de su vector posición. Puesto que la base B en la que está expresado dicho vector (Ec. A.5) es una base fija a la referencia, la derivada temporal de sus componentes nos da el vector velocidad respecto a la referencia suelo, expresado en la base B, del punto J_g . Las tres componentes de este vector son velocidades generalizadas asociadas a las coordenadas generalizadas x , y , z .

$$\{\dot{\overline{OJ_g}}\}_B = \frac{d}{dt} \{\overline{OJ_g}\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \quad (A.6)$$

Aunque la velocidad del punto J_g se puede expresar de manera sencilla por las velocidades generalizadas de la ecuación A.6, es más interesante considerarla según su descomposición en velocidad longitudinal (v_l , velocidad en la dirección del diámetro horizontal), velocidad vertical v_v (velocidad en la dirección vertical) y velocidad transversal v_t (velocidad en la dirección horizontal perpendicular a la velocidad longitudinal).

Estas velocidades generalizadas v_l , v_v , v_t se relacionan con las velocidades generalizadas \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} y la coordenada generalizada ψ según:



$$\begin{aligned}
v_l &= \dot{x} \cdot \cos\psi - \dot{y} \cdot \sin\psi \\
v_v &= \dot{z} \\
v_t &= \dot{x} \cdot \sin\psi + \dot{y} \cdot \cos\psi
\end{aligned}
\tag{A.7}$$

Al no ser v_l , v_t las derivadas de ninguna coordenada generalizada, se dice que son velocidades generalizadas asociadas a pseudocoordenadas.

El vector velocidad del punto J_g puede ser expresado en función de estas velocidades generalizadas en la base B'' de la siguiente forma:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{OJ}_g \right\}_{B''} = \mathbf{v}(J_g) = \begin{Bmatrix} v_t \cdot \cos\theta - v_v \cdot \sin\theta \\ v_l \\ v_t \cdot \sin\theta + v_v \cdot \cos\theta \end{Bmatrix}
\tag{A.8}$$

Desde este punto en adelante se considerará que todos los vectores están expresados en la base B'' a no ser que se indique lo contrario.

La velocidad del centro de la rueda (G) se puede calcular en función de la velocidad de J_g , la velocidad angular de la base B' y el radio de la rueda R según:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(G) &= \mathbf{v}(J_g) + \boldsymbol{\Omega}_{\text{Suelo}}^{B''} \wedge \overline{\mathbf{J}_g G} = \\
&= \begin{Bmatrix} v_t \cdot \cos\theta - v_v \cdot \sin\theta \\ v_l \\ v_t \cdot \sin\theta + v_v \cdot \cos\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\dot{\psi} \cdot \sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cdot \cos\theta \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_t \cdot \cos\theta - v_v \cdot \sin\theta + \dot{\theta} \cdot R \\ v_l + R \cdot \dot{\psi} \cdot \sin\theta \\ v_t \cdot \sin\theta + v_v \cdot \cos\theta \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{A.9}$$

J_g es un punto geométrico que se utiliza para indicar que punto de la rueda es el que está mas cercano al suelo (o en contacto con él) en cada instante de tiempo, pero no es un punto fijo del sólido rueda. La velocidad del punto fijo al sólido rueda que está ocupando la posición del punto J_g en un momento determinado es interesante para calcular el deslizamiento que sufre la rueda. Este punto, perteneciente a la rueda, que en principio será diferente para cada instante de tiempo, se denomina mediante $J_{gl}(\text{rueda})$ y su velocidad se puede calcular mediante la velocidad del punto J_g y la velocidad angular $\dot{\phi}$ de rotación de la rueda alrededor de su eje según:



$$\mathbf{v}(J_{gl(rueda)}) = \mathbf{v}(J_g) + \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \overline{\mathbf{G}J_g} = \quad (A.10)$$

$$\begin{Bmatrix} v_t \cdot \cos\theta - v_v \cdot \sin\theta \\ v_l \\ v_t \cdot \sin\theta + v_v \cdot \cos\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_t \cdot \cos\theta - v_v \cdot \sin\theta \\ v_l + R \cdot \dot{\phi} \\ v_t \cdot \sin\theta + v_v \cdot \cos\theta \end{Bmatrix}$$

Las velocidades de J_g y $J_{gl(rueda)}$ se diferencian en un factor $R \cdot \dot{\phi}$ que se puede interpretar como la velocidad de un punto de la periferia de la rueda si consideramos unicamente la rotación de la misma alrededor de su eje (velocidad periférica).

En el caso particular de estar considerando que la rueda no puede separarse del suelo (enlace bilateral, $v_v = 0$) las velocidades de los puntos J_g , G y $J_{gl(rueda)}$ quedan de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}(J_g) = \begin{Bmatrix} v_t \cdot \cos\theta \\ v_l \\ v_t \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \quad (A.11)$$

$$\mathbf{v}(G) = \begin{Bmatrix} v_t \cdot \cos\theta + \dot{\theta} \cdot R \\ v_l + R \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\theta \\ v_t \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \quad (A.12)$$

$$\mathbf{v}(J_{gl(rueda)}) = \begin{Bmatrix} v_t \cdot \cos\theta \\ v_l + \dot{\phi} \cdot R \\ v_t \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \quad (A.13)$$

A.2. Dinámica

El enlace entre la rueda y el suelo en el caso de que la rueda pueda deslizar, se representa matemáticamente por la siguiente ecuación geométrica de enlace en la que se pone de manifiesto que el punto mas bajo de la rueda no puede atravesar el suelo:

$$z \geq 0 \quad (A.14)$$



El contacto entre el suelo y el neumático provoca dos tipos de fuerzas: las de enlace (fuerza normal ocasionada por la condición de la ecuación A.14) y las debidas al rozamiento existente en el enlace (fuerzas longitudinal y tangencial), que se pueden evaluar según diferentes modelos de deslizamiento. Además de estas fuerzas, también se han de considerar ciertos momentos sobre el neumático en el punto de contacto (Fig. A.3).

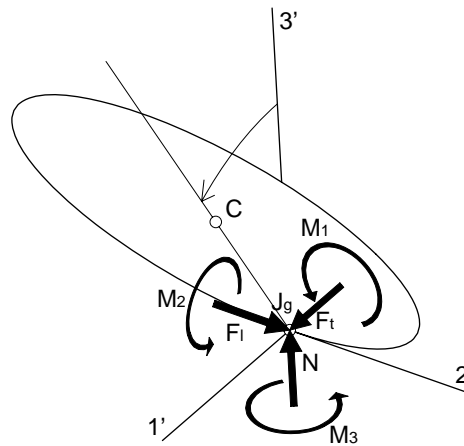


Fig. A.3 Fuerzas y momentos aplicados en el punto de contacto J_g .

Cuando el neumático está en contacto con el suelo, en el punto J_g el suelo puede ejercer en principio el siguiente torsor fuerzas y momentos sobre el neumático, expresados en la base B' :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}\}_{B'} &= \begin{Bmatrix} F_t \\ F_l \\ N \end{Bmatrix} \\ \{\mathbf{M}(J_g)\}_{B'} &= \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{A.15}$$

Si caracterizamos este torsor en el centro de la rueda G y lo expresamos en la base B'' , el torsor resulta:



$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{F}\}_{B''} &= \begin{Bmatrix} F_t \cdot \cos\theta - N \cdot \sin\theta \\ F_l \\ N \cdot \cos\theta + F_t \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \\
 \{\mathbf{M}(G)\}_{B''} &= \begin{Bmatrix} M_1 \cdot \cos\theta - M_3 \cdot \sin\theta + F_l \cdot R \\ M_2 - F_t \cdot R \cdot \cos\theta + N \cdot R \cdot \sin\theta \\ M_3 \cdot \cos\theta + M_1 \cdot \sin\theta \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

La ecuación A.16 es el tursor de las fuerzas que el suelo crea sobre el neumático debido al contacto, expresado en G en la base B''.

A.3. Sistema con cinemática equivalente

En *Visual Nastran* no se puede establecer directamente un enlace entre superficies con radio de curvatura no constante como el que se está estudiando debido a limitaciones del programa. La solución adoptada para representar el contacto entre rueda y suelo es idear una cadena de sólidos auxiliares de enlace (SAE) de masa despreciable, de manera que los enlaces que la constituyan se puedan implementar en *Visual Nastran* y las configuraciones que permitan alcanzar a la rueda estos enlaces entre suelo, SAE y rueda sean las mismas que permite el enlace real.

Para expresar la configuración de la rueda en la referencia suelo se emplean las coordenadas generalizadas x , y , z , ψ , θ , ϕ descritas con anterioridad. Utilizar estas coordenadas se puede interpretar como definir la posición del punto J_g en el espacio y la orientación del diámetro horizontal, el diámetro de máxima pendiente y la rotación propia de la rueda respectivamente.

Al crear la cadena de SAE necesaria se puede utilizar el concepto anterior. De esta manera, consideramos un primer SAE al que denominamos PC (por Punto de Contacto). La posición de uno de los puntos de este sólido (O_{PC}) puede expresarse mediante las coordenadas x , y , z (esta posición coincide con la del punto geométrico de contacto J_g). Si además entre el suelo y este sólido hay un enlace que le permite únicamente variar su orientación un ángulo ψ respecto a un eje vertical estamos definiendo la dirección del diámetro horizontal de la rueda (Fig. A.4).



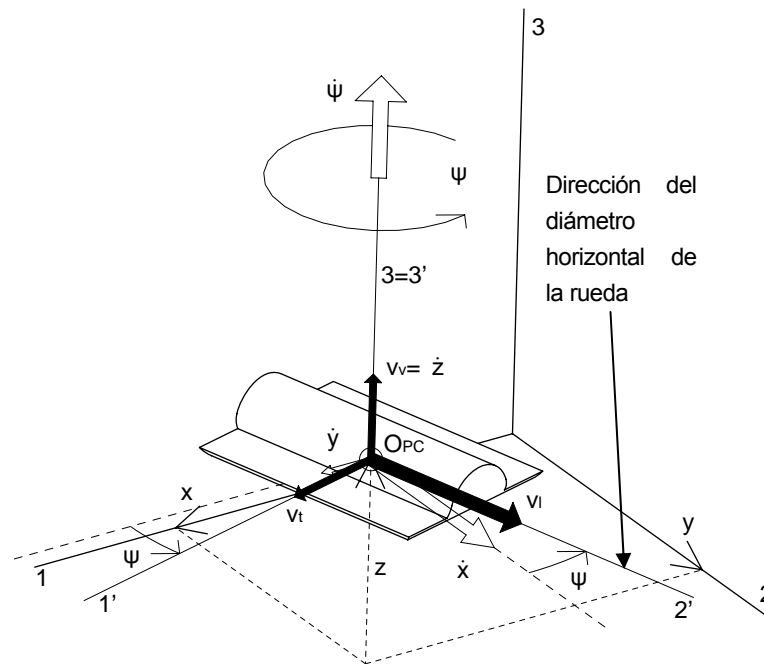


Fig. A.4 Sólido auxiliar PC. Tiene 4 grados de libertad: v_x , v_y , v_z y $\dot{\psi}$.

Ahora, consideramos otro SAE al que denominamos RMP (por Radio de Máxima Pendiente) y que tiene un enlace con PC. Este enlace sólo permite rotar a RPM un ángulo θ respecto al eje fijo al sólido PC en la dirección del diámetro horizontal de la rueda que pasa por el punto O_{PC} . Con este enlace definimos la dirección del diámetro de máxima pendiente de la rueda. Por último, añadimos un enlace entre la rueda y el sólido RMP de forma que: el eje de la rueda sea fijo al sólido RMP y su dirección perpendicular a la del diámetro de máxima pendiente y a la del diámetro horizontal. El centro de la rueda (C) esté situado a una distancia R (igual al radio de la rueda) del punto O_{PC} en la dirección del diámetro de máxima pendiente. Por último, la rueda únicamente ha de poder girar según un ángulo ϕ respecto a su eje (ángulo de rotación propia de la rueda) (Fig. A.5).



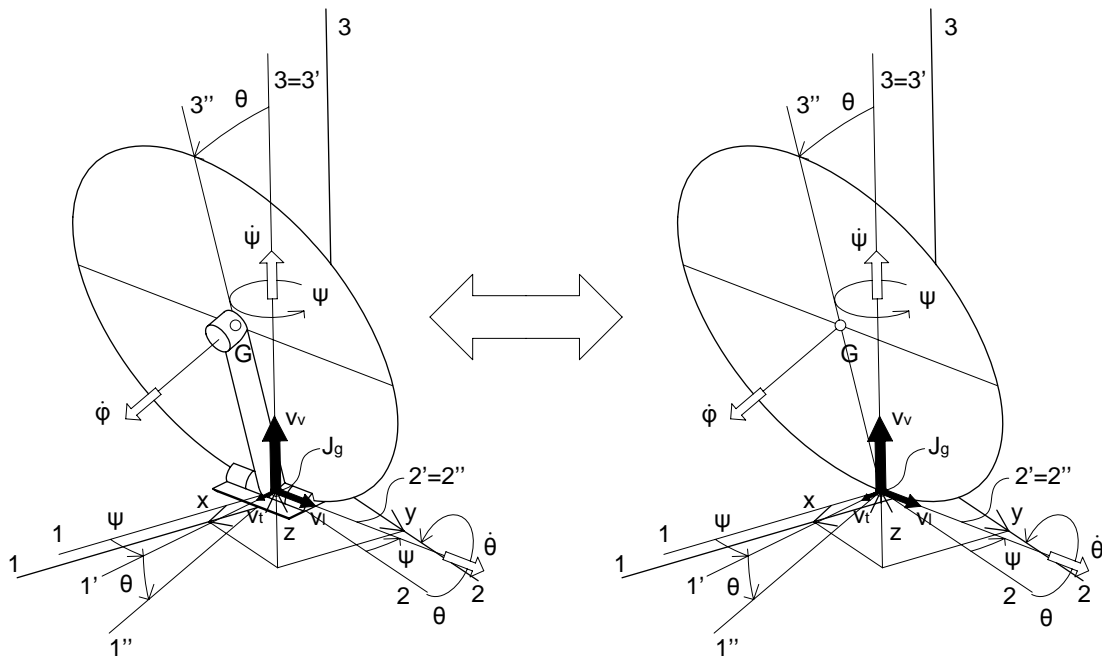


Fig. A.6 Mediante la cadena de SAE formada por PC y RMP el sólido rueda tiene una cinemática equivalente a la rueda del modelo original.

A.4. Sistema con dinámica equivalente

El modelo modificado mediante los SAE es cinemáticamente equivalente al original. Para que este modelo sea válido en una simulación dinámica, hay que comprobar que también es dinámicamente equivalente. Para comprobar si los dos modelos se comportan igual calculamos el torsor de las fuerzas que produce el contacto con el suelo en el centro de la rueda para el modelo original y el modificado. Si los dos torsores son iguales, entonces la sustitución del enlace real mediante la cadena de SAE enlazados es viable.

Para verificar si el sistema simulado mediante los SAE es equivalente desde el punto de vista dinámico, se ha de calcular el torsor que la cadena de enlaces crea en G en la base B'' y comprobar que sea igual al de la ecuación A.16.

Una consideración que se ha de tener en cuenta a la hora de calcular este torsor, es que aunque el sistema equivalente está basado en sólidos auxiliares sin masa, *Visual Nastran* no permite introducir tales sólidos en sus simulaciones. Una manera de solventar este inconveniente es introducir los sólidos en *Visual Nastran* con valores de masa y momentos de inercia varios órdenes inferiores a los valores que se consideran para los componentes de



la motocicleta. Al analizar el tórso de las fuerzas, se habrá de considerar también la influencia que pueden tener estas masas y momentos de inercia para saber cuanto afectan a la dinámica del conjunto.

Al introducirlo en *Visual Nastran*, el sólido PC se crea de manera que su centro de inercia esté situado en el punto O_{PC} ($O_{PC} = G$). También se define su tensor central de inercia de forma que los ejes de la base B' sean direcciones centrales de inercia. Denominamos m_{PC} a la masa del sólido PC y su tensor de inercia y velocidad angular respecto al suelo son respectivamente:

$$[I_G]_{B'} = \begin{bmatrix} I_{11}^{PC} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^{PC} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^{PC} \end{bmatrix} \quad (A.17)$$

$$\{\Omega_{Suelo}^{PC}\}_{B'} = \{\Omega_{Suelo}^{B'}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (A.18)$$

Las fuerzas y momentos expresados en la base B' que el suelo y el sólido RMP crean sobre el sólido PC en el punto O_{PC} a través de sus respectivos enlaces son:

$$\begin{aligned} \{F_{S \rightarrow PC}\}_{B'} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{Bmatrix} & \{F_{RMP \rightarrow PC}\}_{B'} &= \begin{Bmatrix} F_1^B \\ F_2^B \\ F_3^B \end{Bmatrix} \\ \{M_{S \rightarrow PC}(O_{PC})\}_{B'} &= \begin{Bmatrix} M_1^A \\ M_2^A \\ 0 \end{Bmatrix} & \{M_{RMP \rightarrow PC}(O_{PC})\}_{B'} &= \begin{Bmatrix} M_1^B \\ 0 \\ M_3^B \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (A.19)$$

Aplicando el teorema de la cantidad de movimiento en la base B' al sólido PC con los valores de fuerzas que se obtiene de la ecuación A.19 resulta:

$$\begin{aligned} \sum F &= m_{PC} \cdot a \Rightarrow \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^B \\ F_2^B \\ F_3^B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_{PC} \cdot g \end{Bmatrix} &= m_{PC} \cdot \begin{Bmatrix} a_t \\ a_l \\ a_v \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1^B \\ F_2^B \\ F_3^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{PC} \cdot a_t \\ m_{PC} \cdot a_l \\ m_{PC} \cdot (a_v + g) - N \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (A.20)$$



Para aplicar el teorema del momento cinético, calculamos la derivada del vector momento cinético en O_{PC} en la base B' utilizando el tensor de inercia del sólido PC (Ec. A.17), su velocidad angular (Ec. A.18) y la velocidad angular de la base B' (Ec. A.18).

$$\begin{aligned} \{\overline{\mathbf{GK}}\}_{B'} &= [\mathbf{I}_G]_{B'} \cdot \{\boldsymbol{\Omega}_{Suelo}^{PC}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}^{PC} \cdot \dot{\psi} \end{Bmatrix} \\ \{\dot{\overline{\mathbf{GK}}}\}_{B'} &= \frac{d}{dt} \{\overline{\mathbf{GK}}\}_{B'} + \{\boldsymbol{\Omega}_{Suelo}^{B'}\}_{B'} \wedge \{\overline{\mathbf{GK}}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}^{PC} \cdot \ddot{\psi} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Aplicando el teorema del momento cinético en O_{PC} en la base B' :

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}(O_{PC}) &= \{\dot{\overline{\mathbf{GK}}}\}_{B'} \Rightarrow \\ \begin{Bmatrix} M_1^A \\ M_2^A \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_1^B \\ 0 \\ M_3^B \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}^{PC} \cdot \ddot{\psi} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_1^B \\ M_3^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M_1^A \\ I_{33}^{PC} \cdot \ddot{\psi} \end{Bmatrix} \\ M_2^A &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

El sólido RMP se introduce en *Visual Nastran* de manera que su centro de inercia también está situado en el punto O_{PC} ($O_{PC} = G$). Su tensor central de inercia se crea de forma que los ejes de la base B'' sean direcciones centrales de inercia. Denominamos m_{RMP} a la masa del sólido RMP y su tensor de inercia y velocidad angular respecto al suelo son:

$$[\mathbf{I}_G]_{B''} = \begin{bmatrix} I_{11}^{RMP} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^{RMP} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^{RMP} \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$\{\boldsymbol{\Omega}_{Suelo}^{RMP}\}_{B''} = \{\boldsymbol{\Omega}_{Suelo}^{B''}\}_{B''} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi} \cdot \sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cdot \cos\theta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Las fuerzas y momentos que el sólido RMP recibe del sólido PC a través del enlace son iguales a las que el sólido PC recibe del sólido RMP, pero con sentido inverso. Las fuerzas y momentos que provienen de la rueda están aplicados en el punto C. De esta manera, las fuerzas que los sólidos PC y rueda ejercen mediante sus enlaces sobre RMP en la base B'' son:



$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_{PC \rightarrow RMP}\}_{B''} &= \begin{Bmatrix} -F_1^B \cdot \cos\theta + F_3^B \cdot \sin\theta \\ -F_2^B \\ -F_3^B \cdot \cos\theta - F_1^B \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{F}_{Rueda \rightarrow RMP}\}_{B''} = \begin{Bmatrix} F_1^C \\ F_2^C \\ F_3^C \end{Bmatrix} \\ \{\mathbf{M}_{PC \rightarrow RMP}(O_{PC})\}_{B''} &= \begin{Bmatrix} -M_1^B \cdot \cos\theta + M_3^B \cdot \sin\theta \\ 0 \\ -M_3^B \cdot \cos\theta - M_1^B \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{M}_{Rueda \rightarrow RMP}(C)\}_{B''} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2^C \\ M_3^C \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Calculamos la derivada temporal del vector momento cinético en O_{PC} en la base B'' tal como hicimos en el caso del sólido PC.

$$\begin{aligned} \{\overline{\mathbf{GK}}\}_{B''} &= [\mathbf{I}_G]_{B''} \cdot \{\boldsymbol{\Omega}_{Suelo}^{RMP}\}_{B''} = \begin{Bmatrix} -I_{11}^{RMP} \cdot \dot{\psi} \cdot \sin\theta \\ I_{22}^{RMP} \cdot \dot{\theta} \\ I_{33}^{RMP} \cdot \dot{\psi} \cdot \cos\theta \end{Bmatrix} \\ \{\dot{\overline{\mathbf{GK}}}\}_{B''} &= \frac{d}{dt} \{\overline{\mathbf{GK}}\}_{B''} + \{\boldsymbol{\Omega}_{Suelo}^{B''}\}_{B''} \wedge \{\overline{\mathbf{GK}}\}_{B''} = \\ &= \begin{Bmatrix} -I_{11}^{RMP} \cdot \ddot{\psi} \cdot \sin\theta + (I_{33}^{RMP} - I_{11}^{RMP} - I_{22}^{RMP}) \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta \\ I_{22}^{RMP} \cdot \ddot{\theta} + (I_{33}^{RMP} - I_{11}^{RMP}) \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \\ I_{33}^{RMP} \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos\theta + (I_{11}^{RMP} - I_{22}^{RMP} - I_{33}^{RMP}) \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

El que las fuerzas provenientes del enlace con la rueda estén aplicadas en C en lugar de O_{PC} no influye al aplicar el teorema de la cantidad de movimiento. Este desplazamiento se tendrá en cuenta al aplicar el teorema del momento cinético. El teorema de la cantidad de movimiento en la base B'' resulta:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= m_{RMP} \cdot \mathbf{a} \Rightarrow \\ \begin{Bmatrix} -F_1^B \cdot \cos\theta + F_3^B \cdot \sin\theta \\ -F_2^B \\ -F_3^B \cdot \cos\theta - F_1^B \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} &+ \begin{Bmatrix} F_1^C \\ F_2^C \\ F_3^C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_{RMP} \cdot g \cdot \sin\theta \\ 0 \\ -m_{RMP} \cdot g \cdot \cos\theta \end{Bmatrix} = \\ &= m_{RMP} \cdot \begin{Bmatrix} a_t \cdot \cos\theta - a_v \cdot \sin\theta \\ a_l \\ a_v \cdot \cos\theta + a_t \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{Bmatrix} F_1^C \\ F_2^C \\ F_3^C \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} m_{RMP} \cdot (a_t \cdot \cos\theta - a_v \cdot \sin\theta - g \cdot \sin\theta + F_1^B \cdot \cos\theta - F_3^B \cdot \sin\theta) \\ m_{RMP} \cdot a_l + F_2^B \\ m_{RMP} \cdot (a_v \cdot \cos\theta + a_t \cdot \sin\theta + g \cdot \cos\theta + F_3^B \cdot \cos\theta + F_1^B \cdot \sin\theta) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$



Aplicando los resultados de la ecuación A.20:

$$\begin{Bmatrix} F_1^C \\ F_2^C \\ F_3^C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (m_{RMP} + m_{PC}) \cdot (a_t \cdot \cos\theta - (a_v + g) \cdot \sin\theta) + N \cdot \sin\theta \\ (m_{RMP} + m_{PC}) \cdot a_l \\ (m_{RMP} + m_{PC}) \cdot ((a_v + g) \cdot \cos\theta + a_t \cdot \sin\theta) - N \cdot \cos\theta \end{Bmatrix} \quad (A.28)$$

De la aplicación del teorema del momento cinético en O_{PC} calculado en la base B'' teniendo en cuenta que las fuerzas que RMP recibe de la rueda están aplicadas en el punto C a una distancia R (radio de la rueda) resulta:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}(O_{PC}) &= \mathbf{M}_{PC \rightarrow RMP} + \mathbf{M}_{Rueda \rightarrow RMP} + \mathbf{F}_{Rueda \rightarrow RMP} \wedge \overline{\mathbf{CO}_{PC}} = \{\dot{\mathbf{G}}\mathbf{K}\} \Rightarrow \\ &\begin{Bmatrix} -M_1^B \cdot \cos\theta + M_3^B \cdot \sin\theta \\ 0 \\ -M_3^B \cdot \cos\theta - M_1^B \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2^C \\ M_3^C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -R \cdot F_2^C \\ R \cdot F_1^C \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} -I_{11}^{RMP} \cdot \ddot{\psi} \cdot \sin\theta + (I_{33}^{RMP} - I_{11}^{RMP} - I_{22}^{RMP}) \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta \\ I_{22}^{RMP} \cdot \ddot{\theta} + (I_{33}^{RMP} - I_{11}^{RMP}) \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \\ I_{33}^{RMP} \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos\theta + (I_{11}^{RMP} - I_{22}^{RMP} - I_{33}^{RMP}) \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (A.29)$$

Teniendo en cuenta la ecuación A.22 y la ecuación A.27, asignando a m_{PC} y a m_{RMP} el mismo valor arbitrario m y asignando a todos los momentos de inercia el mismo valor arbitrario I, de la aplicación del teorema del momento cinético resulta:

$$\begin{aligned} M_1^A \cdot \cos\theta + 2 \cdot I \cdot \ddot{\psi} \cdot \sin\theta - R \cdot 2 \cdot m \cdot a_t + I \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta &= 0 \\ \begin{Bmatrix} M_2^C \\ M_3^C \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -R \cdot 2 \cdot m \cdot (a_t \cdot \cos\theta - (a_v + g) \cdot \sin\theta) - R \cdot N \cdot \sin\theta + I \cdot \ddot{\theta} \\ 2 \cdot I \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos\theta - M_1^A \cdot \sin\theta - I \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (A.30)$$

De las ecuaciones A.27 y A.29 se obtiene el tursor en la base B'' de las fuerzas que la rueda recibe por el contacto con el suelo a través de los sólidos PC y RMP:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}\}_{B''} &= \begin{Bmatrix} 2 \cdot m \cdot (-a_t \cdot \cos\theta + (a_v + g) \cdot \sin\theta) - N \cdot \sin\theta \\ -2 \cdot m \cdot a_l \\ 2 \cdot m \cdot (-(a_v + g) \cdot \cos\theta - a_t \cdot \sin\theta) + N \cdot \cos\theta \end{Bmatrix} \\ \{\mathbf{M}(\mathbf{G})\}_{B''} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ R \cdot 2 \cdot m \cdot (a_t \cdot \cos\theta - (a_v + g) \cdot \sin\theta) + R \cdot N \cdot \sin\theta - I \cdot \ddot{\theta} \\ -2 \cdot I \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos\theta + M_1^A \cdot \sin\theta + I \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (A.31)$$



Comparando los torsores A.16 y A.31 vemos que para que los dos torsores sean equivalentes es necesario añadir los términos de A.16 en que intervengan las fuerzas F_1 y F_t y los momentos M_1 , M_2 , M_3 . También es necesario que los términos del torsor A.30 en los que intervengan la masa y la inercia de los sólidos auxiliares se anulen.

Respecto a la primera condición, en *Visual Nastran* se pueden crear fuerzas y momentos dentro del modelo aplicadas sobre el sólido rueda en su centro de inercia G y que cumplan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}'(\mathbf{G})\}_{B''} &= \begin{Bmatrix} F_t \cdot \cos\theta \\ F_1 \\ F_t \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \\ \{\mathbf{M}'(\mathbf{G})\}_{B''} &= \begin{Bmatrix} M_1 \cdot \cos\theta - M_3 \cdot \sin\theta + F_1 \cdot R \\ M_2 - F_t \cdot R \cdot \cos\theta \\ M_3 \cdot \cos\theta + M_1 \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Como los valores de masa e inercia m , I de los sólidos auxiliares aparecen multiplicando en el torsor A.30 en todos los factores que interesa que sean nulos, la segunda condición se cumple siempre que estos valores m , I sean 0. El inconveniente es que en *Visual Nastran* no se puede asignar un valor nulo de masa o inercia. La solución, entonces, es asignar un valor no nulo a m e I , pero que sea lo suficientemente pequeño para que el valor de los términos que se habrían de anular sea varios órdenes inferior al valor de las fuerzas y momentos que actúan sobre la rueda. Aunque este método no permite la perfecta equivalencia entre el sistema rueda real y el sistema rueda con sólidos auxiliares el error que se comete es inferior al que se puede cometer con algunas de las simplificaciones que se tienen en cuenta. Si *Visual Nastran* permitiera introducir auténticos SAE, es decir, se pudieran definir sólidos especiales sin masa que transmitieran las fuerzas y los momentos tal y como los reciben, los dos sistemas, con y sin sólidos auxiliares, se podrían hacer totalmente equivalentes.



B. Anexo B: Enlaces en *Visual Nastran*

B.1. Manera de implementar los enlaces

Visual Nastran es un programa de simulación de mecanismos que permite trabajar con conjuntos de sólidos rígidos cuyas coordenadas y/o velocidades generalizadas están relacionadas mediante enlaces. La forma en la que *Visual Nastran* implementa los enlaces consiste en relacionar mediante ecuaciones las componentes de posición y/o velocidad relativas entre dos sistemas de coordenadas. Así, para enlazar dos sólidos, se ha de definir previamente un sistema de coordenadas local en cada uno de ellos y establecer el enlace entre esos dos sistemas (Fig. B.1).

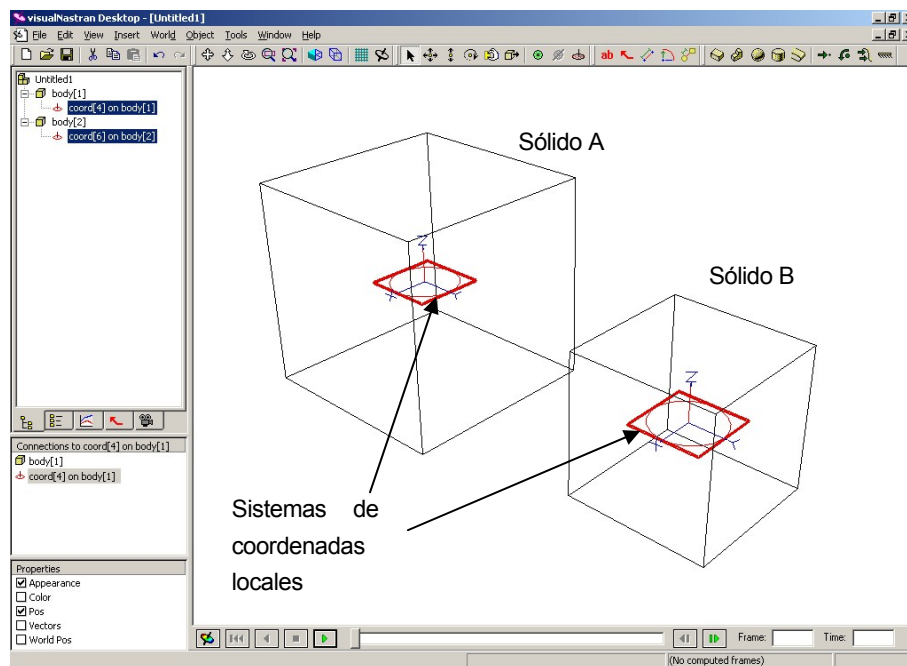


Fig. B.1 Sólidos rígidos A y B definidos en *Visual Nastran* con un sistema de coordenadas local asociado a cada uno de ellos.

Otra característica de la manera de crear enlaces en *Visual Nastran* es que únicamente se pueden establecer entre dos sistemas de coordenadas que van unidos a algún sólido (uno de estos sólidos puede ser el suelo). Esta característica impide crear enlaces compuestos de otros mas sencillos sin que intervengan sólidos intermedios.



La manera de implementar enlaces en *Visual Nastran* tiene la ventaja de ser sencilla e intuitiva y no depender de las características geométricas del sólido, pero presenta el inconveniente de limitar el número de enlaces que pueden establecerse. Por ejemplo, resulta imposible crear un enlace de contacto con deslizamiento entre superficies con radios de curvatura variables y finitos los de alguna de ellas. Un enlace de este tipo podría ser el contacto entre una superficie toroidal (forma aproximada de un neumático de motocicleta) y un plano (superficie donde contacta el neumático).

B.2. Enlaces disponibles en *Visual Nastran*

B.2.1. Junta rígida

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas que une de manera que sus orígenes y las direcciones de sus vectores directores coinciden en todo momento (Fig. B.2).

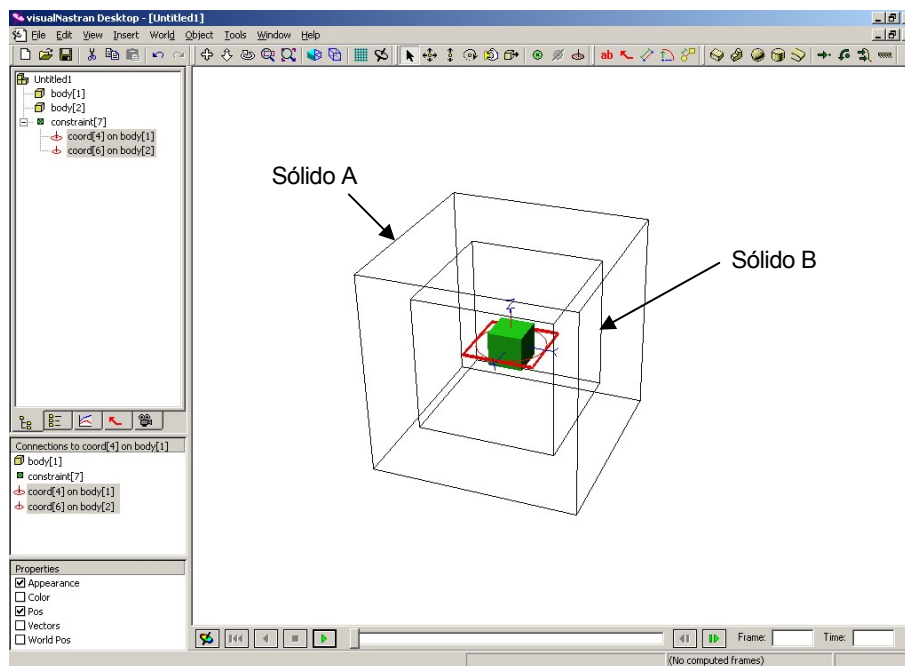


Fig. B.2 Sólidos rígidos A y B unidos por un enlace de junta rígida.

Este enlace no permite ningún grado de libertad entre los sistemas de coordenadas (y por tanto los sólidos) que une.



B.2.2. Junta rígida en una guía

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas unidos de manera que no pueden variar su orientación relativa. Además, el origen de uno de estos sistemas de coordenadas únicamente se puede desplazar a lo largo de una de las direcciones definidas por los vectores directores del otro sistema de coordenadas

En la figura B.3 el sólido B mantiene su orientación fija respecto al sólido A, pero desplaza el origen de su sistema de coordenadas asociado en la dirección del eje z del sistema de coordenadas asociado a A.

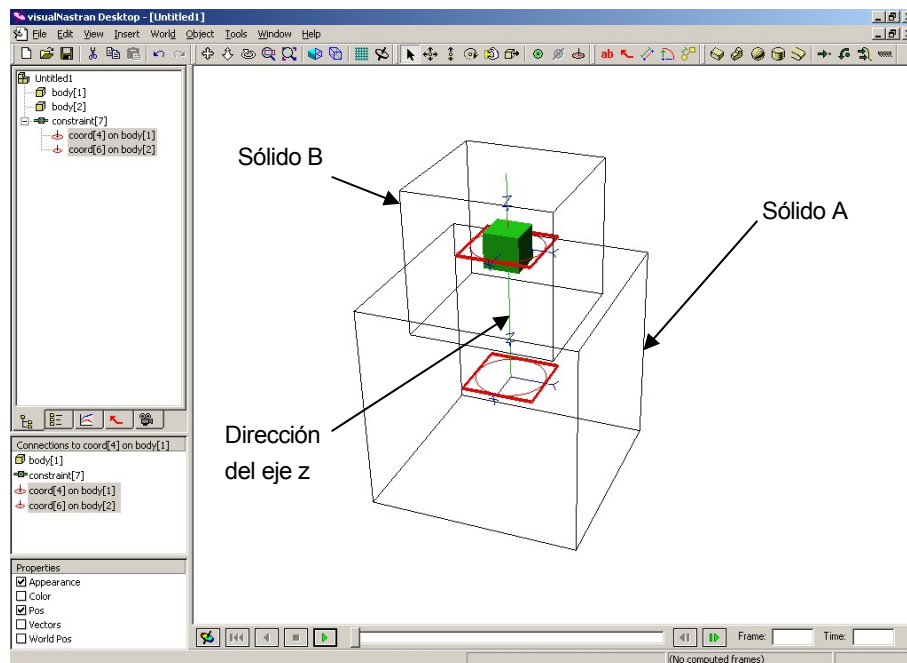


Fig. B.3 Sólido B unido al A por un enlace de junta rígida en una guía que le permite desplazarse en una dirección.

Este enlace permite un grado de libertad (desplazamiento a lo largo de una dirección) de uno de los sólidos enlazados respecto al otro.



B.2.3. Junta rígida en un plano

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas unidos de manera que no pueden variar su orientación relativa. Además, el origen de uno de estos sistemas de coordenadas se puede desplazar a lo largo y ancho de un plano definido por dos de las direcciones de los vectores directores del otro sistema de coordenadas

En la figura B.4 el sólido B mantiene su orientación fija respecto al sólido A, pero desplaza el origen de su sistema de coordenadas asociado sobre un plano definido por las direcciones de los vectores x, y del sistema de coordenadas asociado a A.

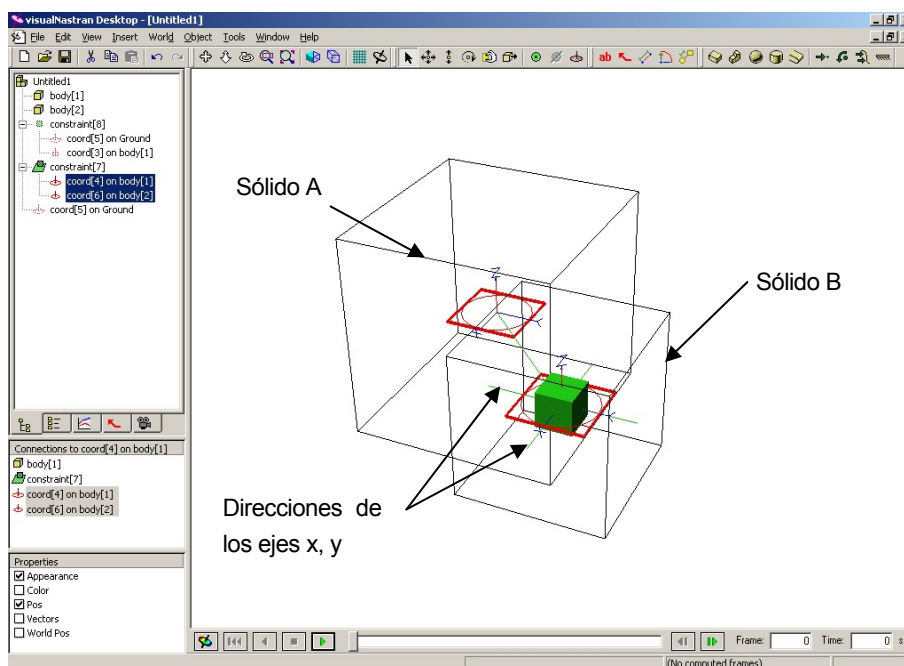


Fig. B.4 Sólido B unido al A por un enlace de junta rígida en un plano que le permite desplazarse en dos direcciones.

Este enlace permite dos grados de libertad (desplazamiento según dos direcciones) entre los sólidos a los que une.



B.2.4. Junta de revolución

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas unidos de manera que la posición de sus orígenes es la misma. El enlace permite a los sistemas de coordenadas variar su orientación relativa respecto a un eje de giro común definido por la dirección de un versor de uno de los sistemas de coordenadas.

En la figura B.5 el sólido B puede rotar respecto a A alrededor del eje z de A.

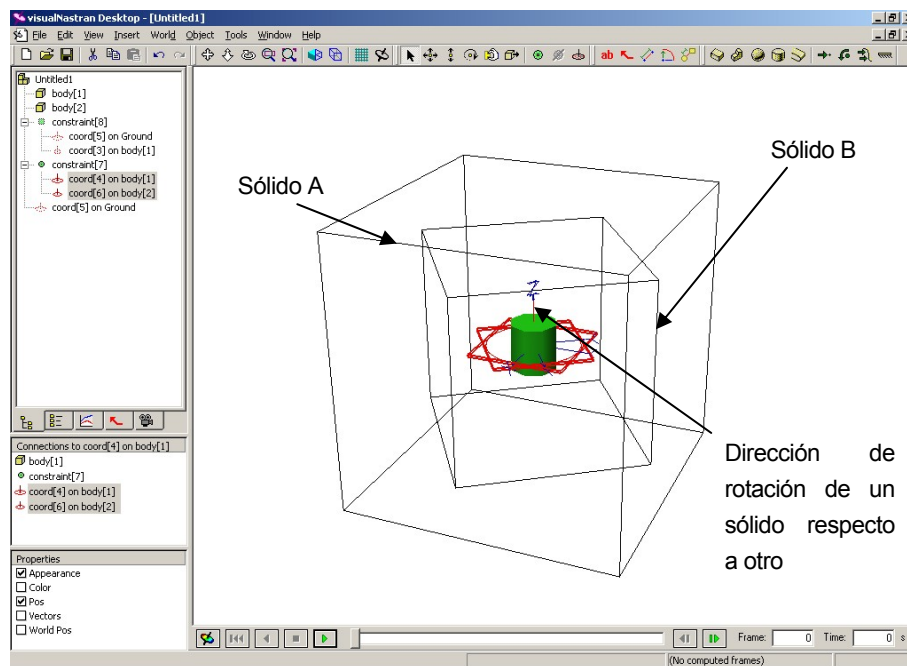


Fig. B.5 Sólido B unido al A por una junta de revolución que le permite variar su orientación relativa respecto al eje z del sistema de coordenadas asociado a A.

Este tipo de enlace permite un grado de libertad (rotación respecto a un eje) entre los sólidos unidos.



B.2.5. Junta de revolución en una guía

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas unidos de manera que la posición del origen de uno de ellos se puede desplazar a lo largo de un eje definido por un versor del otro. El enlace también permite a los sistemas de coordenadas variar su orientación relativa respecto a un eje de giro definido por la dirección de un versor de uno de ellos.

En la figura B.6 el sólido B puede rotar respecto a A alrededor del eje z de A y desplazar su origen a lo largo de ese mismo eje (no tienen porqué coincidir los ejes de rotación y desplazamiento).

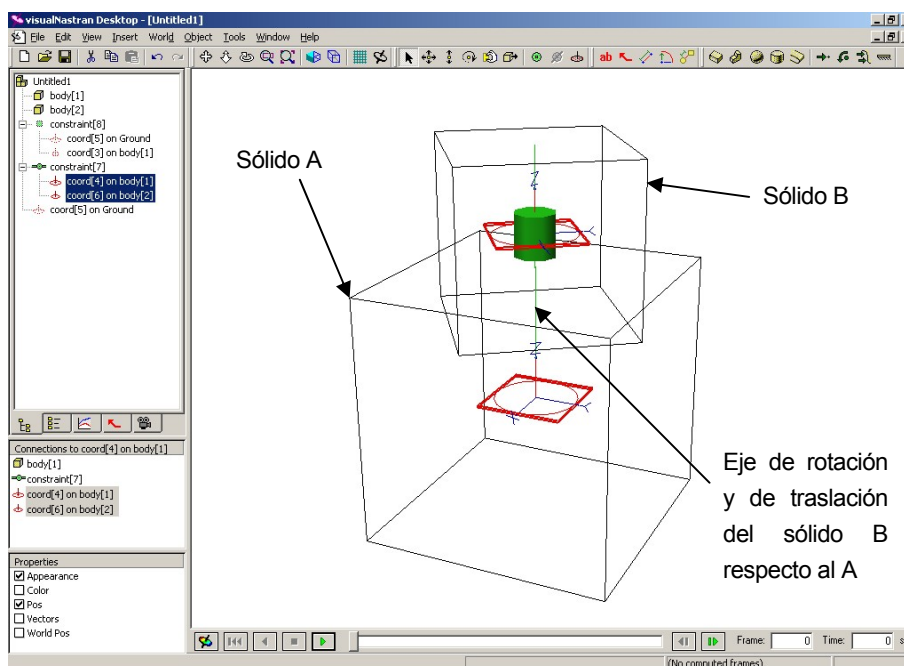


Fig. B.6 Sólido B unido al A por una junta de revolución en una guía que le permite variar su orientación respecto al eje z del sistema de coordenadas en A y desplazar su origen a lo largo de esa dirección.

Este tipo de enlace permite dos grados de libertad (rotación y traslación respecto a dos ejes que pueden o no coincidir) entre los sólidos unidos.



B.2.6. Junta de revolución en un plano

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas unidos de manera que el origen de uno de ellos se puede desplazar sobre una superficie definida por dos versores del otro. El enlace, además, permite a los sistemas de coordenadas variar su orientación relativa respecto a un eje de giro definido por la dirección de un versor de uno de ellos.

En la figura B.7 el sólido B puede rotar respecto a A alrededor del eje z de A y desplazar su origen a lo largo de ese mismo eje (no tienen porqué coincidir los ejes de rotación y desplazamiento).

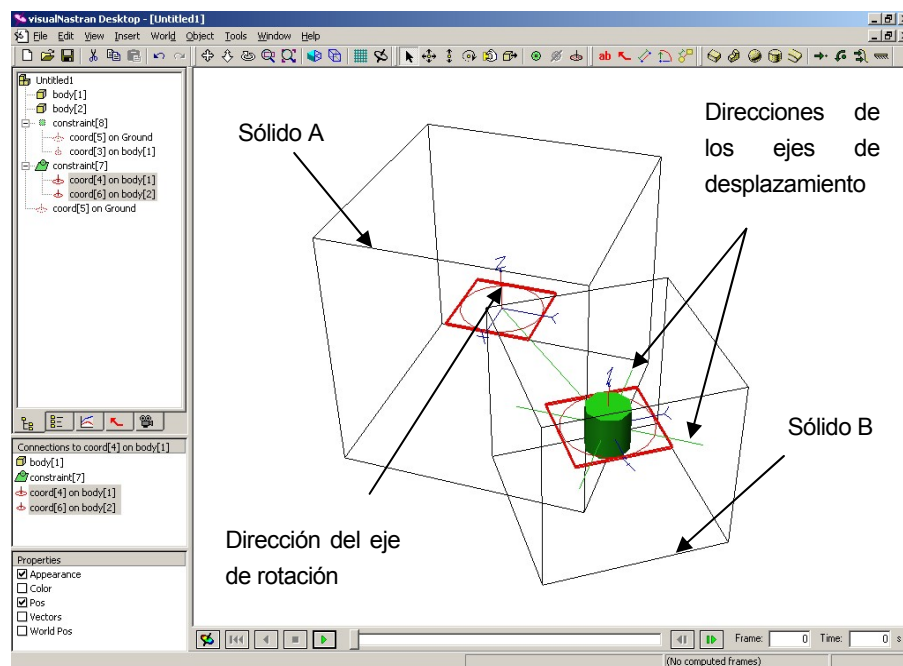


Fig. B.7 Sólido B unido al A por una junta de revolución en un plano que le permite variar su orientación respecto al eje z del sistema de coordenadas en A y desplazar su origen según los ejes x e y de dicho sistema.

Este enlace permite tres grados de libertad entre los sólidos unidos. Uno de los grados de libertad es de rotación respecto a un eje y dos son de traslación respecto a dos ejes que pueden o no coincidir con el de rotación.



B.2.7. Junta esférica

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas unidos de manera que sus orígenes coinciden. El enlace permite a los sistemas de coordenadas variar su orientación relativa sin ninguna restricción.

En la figura B.8 el sólido B puede adquirir cualquier orientación arbitraria respecto al sólido A.

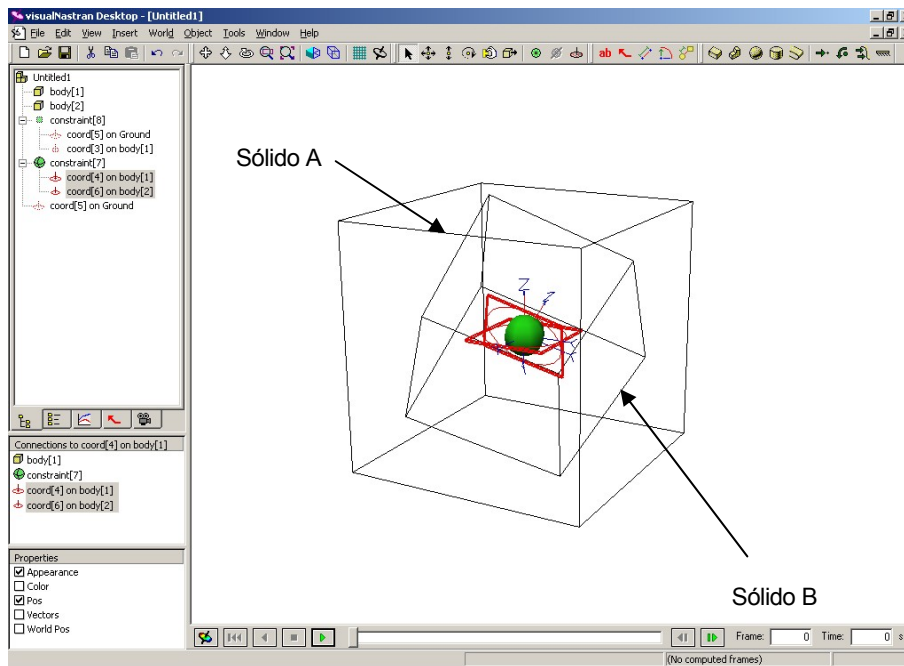


Fig. B.8 Sólido B unido al A por una junta esférica que le permite variar su orientación relativa en cualquier dirección manteniendo los orígenes de sus sistemas de coordenadas unidos.

Este enlace permite tres grados de libertad de orientación entre los sólidos unidos.



B.2.8. Junta esférica en una guía

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas unidos de manera que el origen de uno de ellos puede desplazarse en la dirección definida por un versor del otro sistema de coordenadas. Con este enlace los sistemas de coordenadas pueden variar su orientación relativa sin ninguna restricción.

En la figura B.9 el sólido B puede adquirir cualquier orientación arbitraria respecto al sólido A y puede desplazar su origen de coordenadas respecto al eje z del sistema de coordenadas asociado a A.

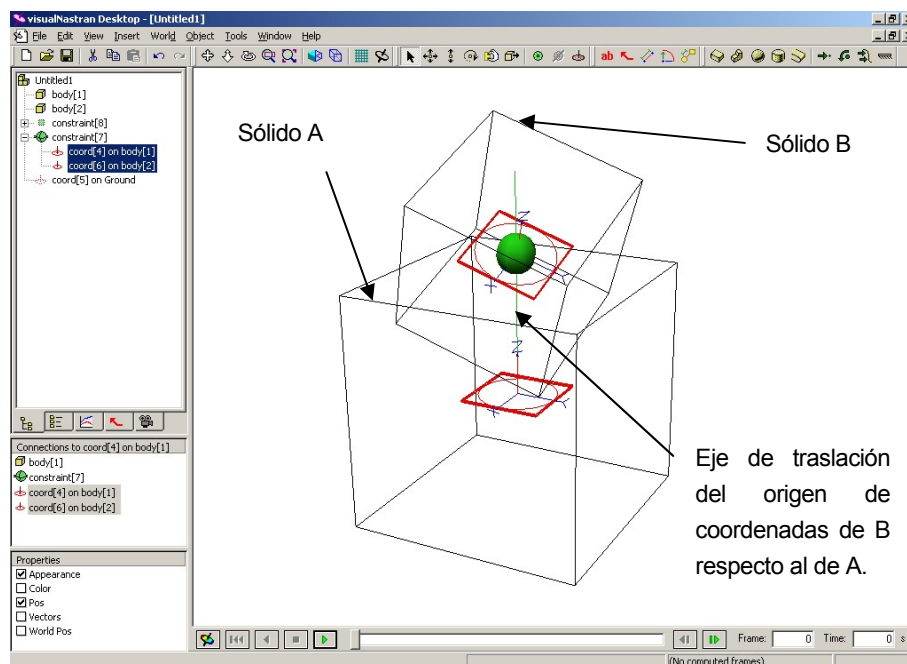


Fig. B.9 Sólido B unido al A por una junta esférica en una guía que le permite desplazarse respecto al eje z del sistema de coordenadas de A y alcanzar cualquier orientación relativa.

Este enlace permite cuatro grados de libertad entre los sólidos unidos, tres asociados a la variación de la orientación entre ellos y uno debido al desplazamiento a lo largo de una dirección.



B.2.9. Junta esférica en un plano

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas unidos de manera que el origen de uno de ellos puede desplazarse sobre un plano definido por dos versores del otro sistema de coordenadas. Con este enlace los sistemas de coordenadas pueden variar su orientación relativa sin ninguna restricción.

En la figura B.10 el sólido B puede adquirir cualquier orientación arbitraria respecto al sólido A y puede desplazar su origen de coordenadas sobre el plano definido por los ejes x e y del sistema de coordenadas asociado a A.

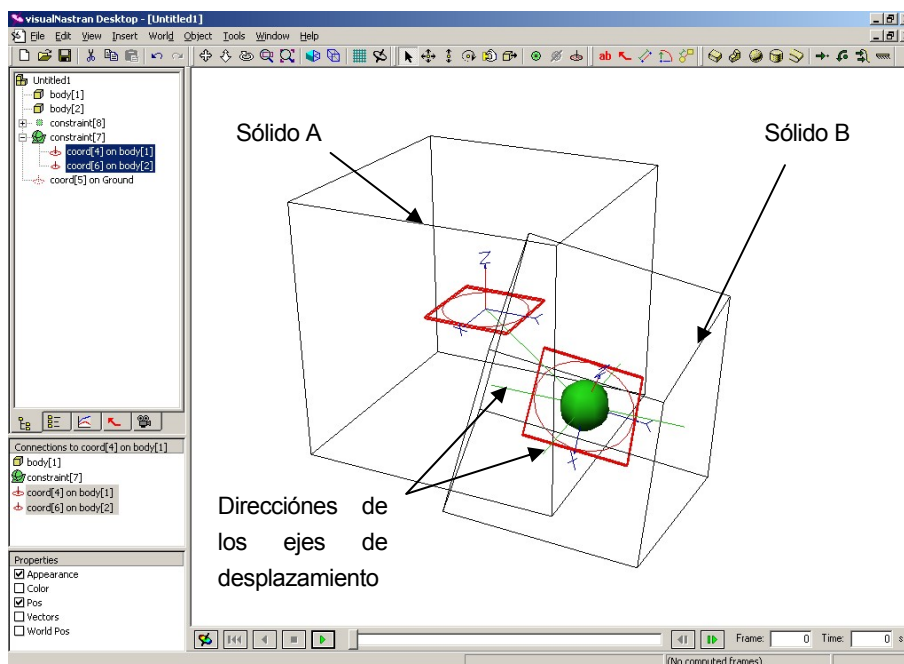


Fig. B.10 Sólido B unido al A por una junta esférica en un plano que le permite variar su origen según los ejes x e y del sistema de coordenadas de A y alcanzar cualquier orientación relativa.

Este enlace permite cinco grados de libertad entre los sólidos unidos, tres asociados a la variación de la orientación entre ellos y dos debidos al desplazamiento a lo largo de dos direcciones.



B.2.10. Cuerda

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas unidos de manera que pueden alcanzar cualquier orientación relativa. Además, los orígenes se pueden desplazar libremente en el espacio, siempre que la distancia entre ellos sea menor que un cierto valor (la longitud de la cuerda).

En la figura B.11 el sólido B puede adquirir cualquier orientación arbitraria respecto al sólido A. Además, puede situar su origen de coordenadas en cualquier punto del espacio interior a una esfera de radio la longitud de la cuerda y centro el origen del sistema de coordenadas de A.

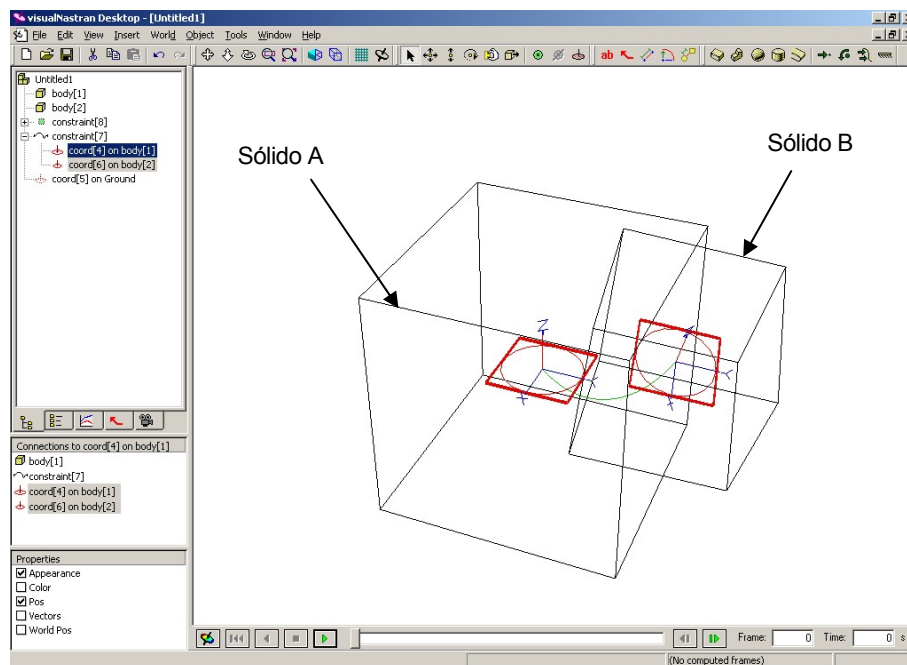


Fig. B.11 Sólido B unido al A por una cuerda. El origen del sistema de coordenadas asociado a B ha de permanecer a una distancia del de A menor o igual a la longitud de la cuerda.

Este enlace permite seis grados de libertad entre los sólidos unidos siempre que la distancia de separación de sus sistemas de coordenadas sea menor que la de la cuerda. Cuando la distancia es igual a la de la cuerda, el número de grados de libertad que permite son cinco. Se puede interpretar como un enlace de distancia constante que actúa sólo a partir de cierta distancia de separación.



B.2.11. Separador

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas unidos de manera que pueden alcanzar cualquier orientación relativa. Además, los orígenes se pueden desplazar libremente en el espacio, siempre que la distancia entre ellos sea mayor que un cierto valor (distancia mínima de separación).

En la figura B.12 el sólido B puede adquirir cualquier orientación arbitraria respecto al sólido A. Además, puede situar su origen de coordenadas en cualquier punto del espacio exterior a una esfera de radio la distancia mínima de separación y centro el origen del sistema de coordenadas de A.

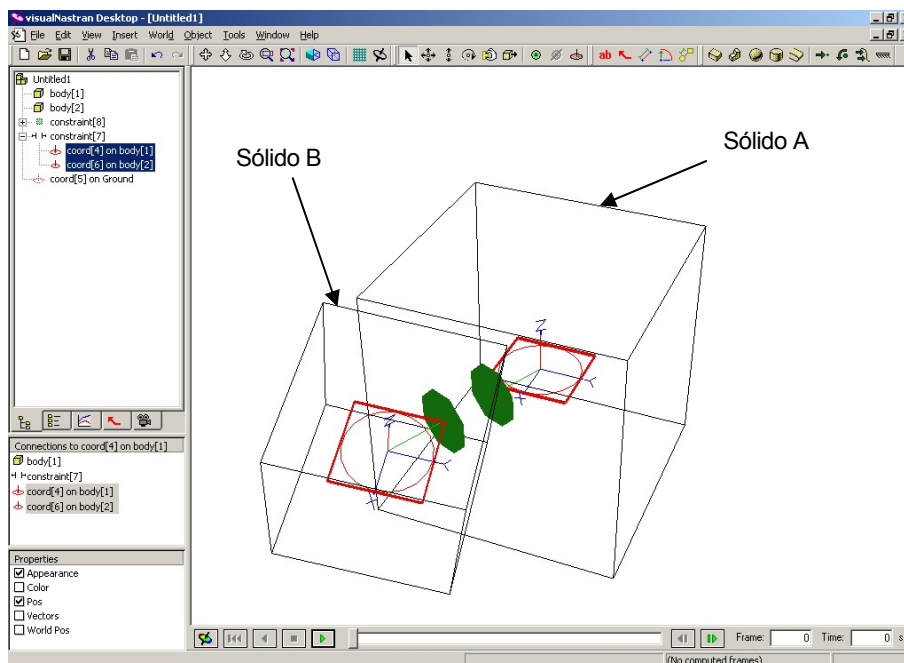


Fig. B.12 Sólido B unido al A por un separador. El origen del sistema de coordenadas asociado a B ha de permanecer a una distancia del de A mayor o igual a la distancia mínima de separación.

Este enlace permite seis grados de libertad entre los sólidos unidos siempre que la distancia de separación de sus sistemas de coordenadas sea mayor que un determinado valor. Cuando la distancia es igual a la de ese valor, el número de grados de libertad que permite son cinco. Se puede interpretar como un enlace de distancia constante que actúa sólo a partir de cierta distancia de separación. Este enlace es el opuesto del enlace cuerda.



B.2.12. Barra

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas unidos de manera que pueden alcanzar cualquier orientación relativa. Además, los orígenes se pueden desplazar libremente en el espacio, siempre que la distancia entre ellos sea igual a un cierto valor (longitud de la barra).

En la figura B.13 el sólido B puede adquirir cualquier orientación arbitraria respecto al sólido A. Además, puede situar su origen de coordenadas en cualquier punto del espacio sobre una esfera de radio la longitud de la barra y centro el origen del sistema de coordenadas de A.

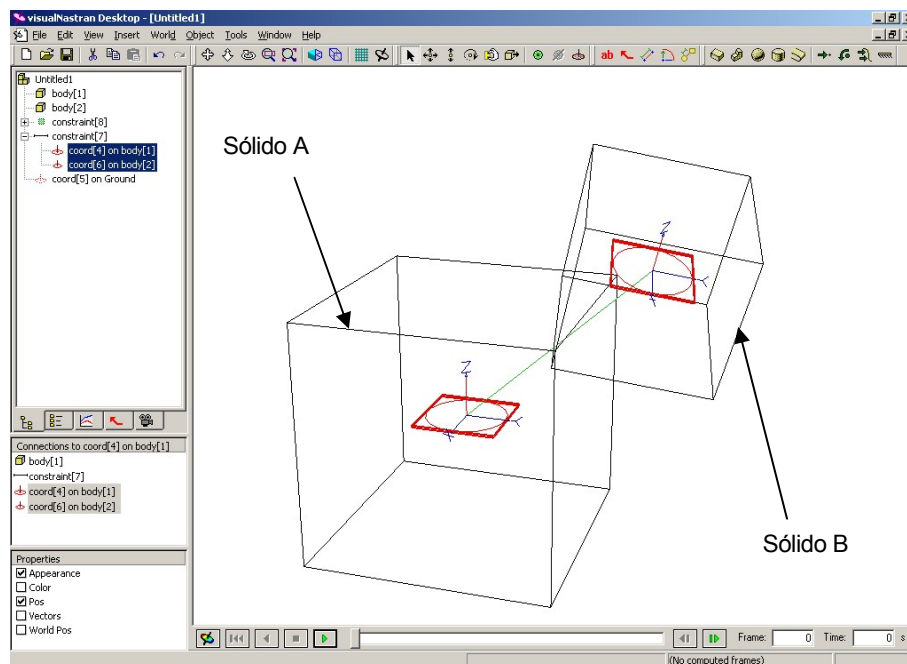


Fig. B.13 Sólido B unido al A por una barra. El origen del sistema de coordenadas asociado a B ha de permanecer a una distancia del de A igual a la longitud de la barra.

Este enlace permite cinco grados de libertad entre los sólidos unidos, tres de rotación y dos de desplazamiento sobre la superficie de una esfera.



B.2.13. Junta paralela

Este enlace relaciona los sistemas de coordenadas unidos de manera que sus orígenes pueden alcanzar cualquier posición relativa en el espacio. Los sistemas de coordenadas, además, pueden variar su orientación relativa respecto a un eje definido por un versor de uno de ellos.

En la figura B.14 el sólido B puede situar el origen de su sistema de coordenadas asociado en cualquier posición respecto al del sólido A. Además, el sistema de coordenadas de B puede rotar respecto al eje z del sistema de coordenadas asociado a A.

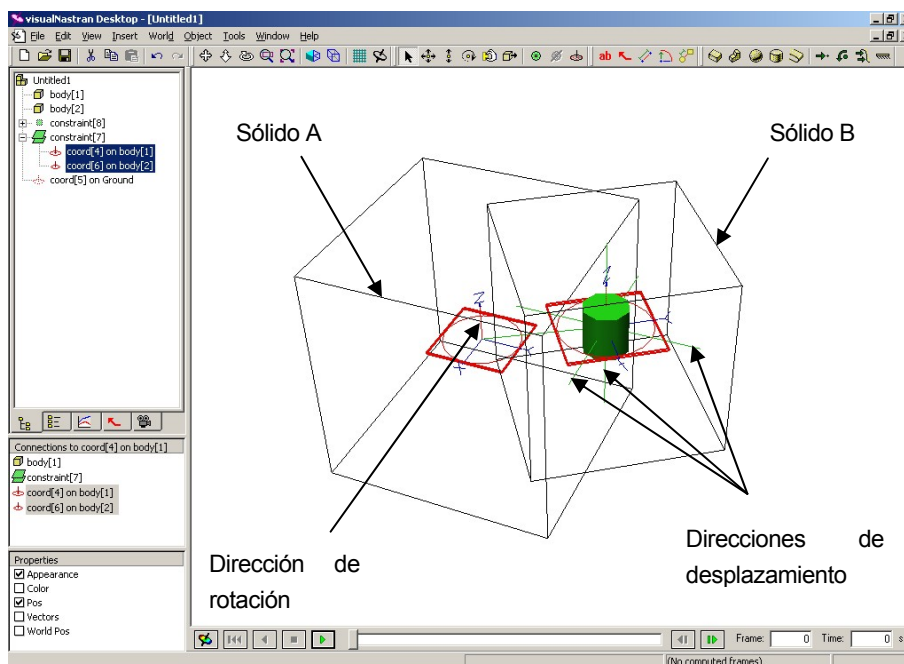


Fig. B.14 Sólido B unido al A por una junta paralela. B puede alcanzar cualquier posición en el espacio manteniendo el eje z de su sistema de coordenadas local paralelo al del asociado al sólido A.

Este enlace permite cuatro grados de libertad entre los sólidos unidos, tres de desplazamiento a través del espacio y uno de rotación.



B.3. Otros tipos de unión entre sólidos

En este apartado se describen otros elementos de *Visual Nastran* que guardan ciertas similitudes con los enlaces pero no pueden clasificados estrictamente como tales.

Estos elementos se asemejan a los enlaces en la forma de ser introducidos en el modelo, entre dos sistemas de coordenadas locales asociados a dos sólidos, y en que relacionan ciertas coordenadas y velocidades generalizadas de los sólidos al modo en como lo hacen los enlaces. La diferencia entre estos elementos y los enlaces es que pueden aplicar fuerzas y momentos entre los sistemas de coordenadas locales en función de diferentes variables.

B.3.1. Muelle/amortiguador lineal

Este elemento de unión ejerce una fuerza de atracción o repulsión entre los orígenes de los sistemas de coordenadas locales a los que está unido en función de su distancia de separación y/o de su velocidad relativa.

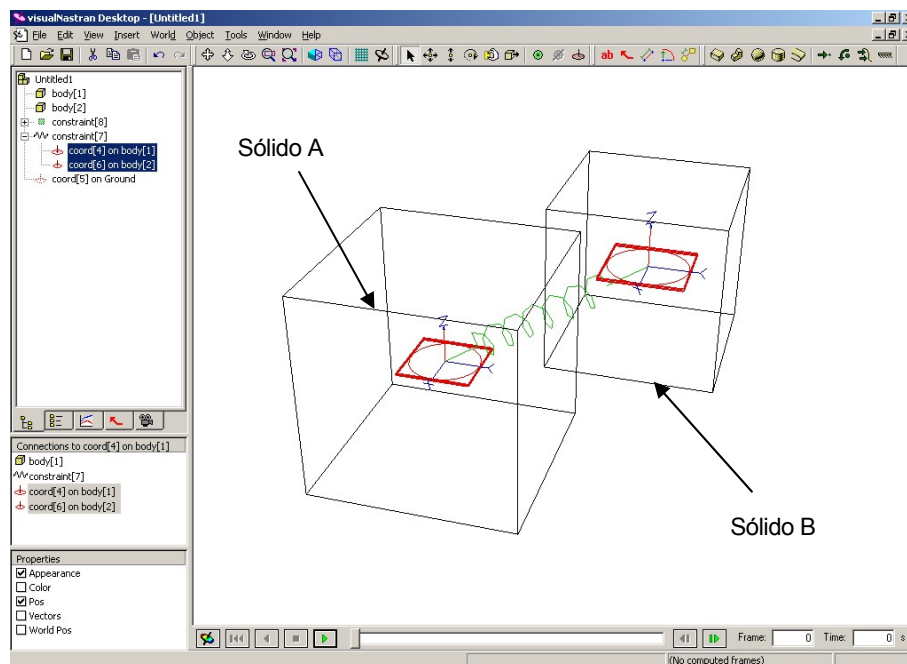


Fig. B.15 Elemento muelle/amortiguador lineal intercalado entre los orígenes de los sistemas de coordenadas asociados a los sólidos A y B.



B.3.2. Muelle/amortiguador de revolución

Este elemento de unión hace coincidir los orígenes de los sistemas de coordenadas locales a los que está unido y permite la rotación de uno de ellos respecto a un eje fijo al otro. Este elemento, además, aplica un momento entre los sistemas de coordenadas en función de la diferencia en la orientación de los sistemas de coordenadas y/o su velocidad de rotación relativa.

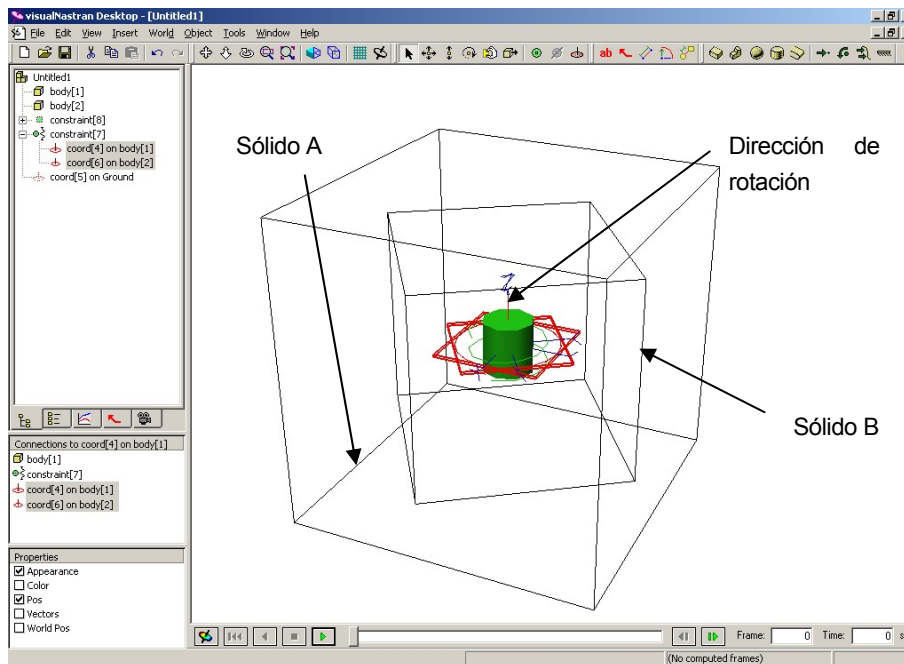


Fig. B.16 Elemento muelle/amortiguador de revolución intercalado entre los sistemas de coordenadas asociados a los sólidos A y B.



B.3.3. Actuador lineal

Este elemento de unión permite definir la posición entre los centros de dos sistemas de coordenadas locales, su velocidad relativa, su aceleración relativa o la fuerza que se ejercen.

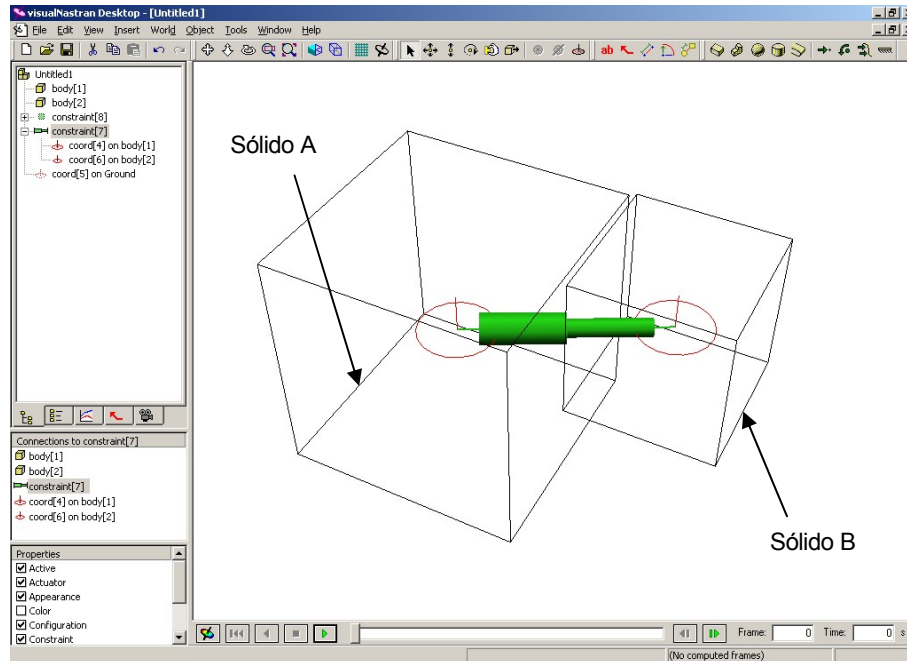


Fig. B.17 Elemento actuador lineal intercalado entre los sistemas de coordenadas asociados a los sólidos A y B.



B.3.4. Actuador de revolución

Este elemento de unión hace coincidir el origen de los sistemas de coordenadas entre los que se sitúa y permite definir su orientación relativa, velocidad angular relativa, aceleración angular relativa o la momento que se ejercen respecto a un eje definido por el versor de uno de ellos.

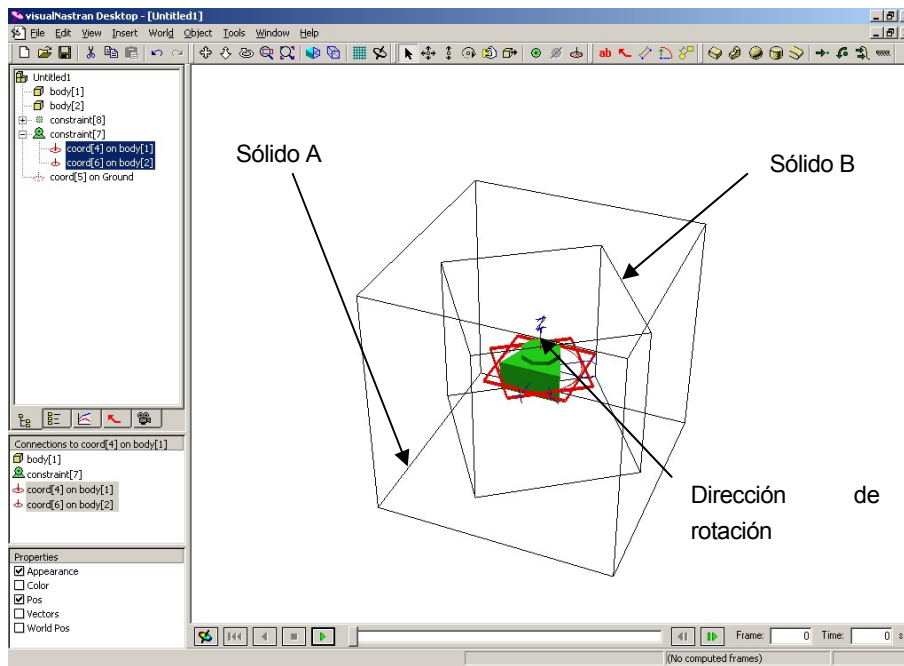


Fig. B.18 Elemento actuador lineal intercalado entre los sistemas de coordenadas asociados a los sólidos A y B.



C. Anexo C: Ecuaciones geométricas y mecánicas de los modelos implementados en *Visual Nastran*

En este apartado se describen las ecuaciones, y la manera de obtenerlas, que se introducen en el programa *Mathematica* para su resolución numérica. Esta resolución se utiliza para comprobar que las simulaciones llevadas a cabo con *Visual Nastran* son coherentes con el modelo mecánico implementado en él.

C.1. Ecuaciones geométricas

En *Visual Nastran* se implementan dos modelos A y B de motocicleta, sin suspensión y con ella respectivamente, empleando sólidos auxiliares de enlace (SAE) para emular el contacto rueda-suelo. Para comprobar que *Visual Nastran* efectivamente posiciona la motocicleta según permite un enlace real entre rueda y suelo directamente, utilizamos el programa *Mathematica* para calcular su posición en función de valores de variables que se pueden controlar en *Visual Nastran*.

Los valores correspondientes a la inclinación de la Rueda Trasera respecto al suelo (θ_{RT} , inclinación de su radio de máxima pendiente) y giro del Manillar respecto al Chasis (ψ_M) pueden ser controlados como variables independientes en *Visual Nastran* tanto en el modelo A como en el modelo B. En el modelo B, además, se pueden fijar como parámetros el ángulo de rotación del Chasis respecto al Basculante (ϕ_C) y la distancia del Eje Delantero respecto al Manillar (d).

Para calcular la posición de la motocicleta en función de estas variables y parámetros se utiliza la hipótesis simplificadora que sitúa la altura de los puntos geométricos de contacto de las ruedas al nivel del suelo. Con esta condición es posible establecer una ecuación de cierre geométrico que iguale la altura del punto de contacto geométrico delantero (J_{g_RD}) a la del punto de contacto geométrico trasero (J_{g_RT}). En la base B' definida en el punto 6.2.1 de la memoria, con versor 3 vertical y versor 2 en la dirección de rodadura de la rueda, asociada a la Rueda Trasera, la ecuación tiene la siguiente forma:



$$\{\overline{J_{g_RT} J_{g_RD}}\}_{B'_{RT}} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (C.1)$$

La manera de resolver esta ecuación en *Mathematica* es encontrando el vector de posición del punto J_{g_RD} respecto al del punto J_{g_RT} a través de las posiciones relativas entre los diferentes sólidos que forman la motocicleta.

Las siguientes ecuaciones se desarrollan para encontrar una solución para el modelo B implementado en *Visual Nastran*. Para el modelo A se ha de realizar un procedimiento similar pero con alguna simplificación, por lo que no será explicado en detalle.

Los sólidos que intervienen en la cadena de enlaces entre J_{g_RT} y J_{g_RD} son: Rueda Trasera, Basculante, Chasis, Manillar, Eje Delantero y Rueda Delantera. Cada uno de estos sólidos, exceptuando las ruedas, tiene una base local asociada a la que se denominará con la letra B y el subíndice correspondiente a la inicial o iniciales de ese sólido.

Considérense los siguientes puntos de una motocicleta:

Punto	Descripción
J_{g_RT}	Punto geométrico de contacto entre Rueda Trasera y suelo
Pb3	Punto de enlace entre Basculante y Rueda Trasera
Pb1	Punto de enlace entre Basculante y Chasis
Pc1	Punto de enlace entre Chasis y Manillar
Pm2	Punto de enlace entre Manillar y Eje Delantero
Pe1	Punto de enlace entre Eje Delantero y Rueda Delantera
J_{g_RD}	Punto geométrico de contacto entre Rueda Delantera y suelo

Tabla C.1 Puntos característicos de una motocicleta necesarios para la resolución de su geometría.



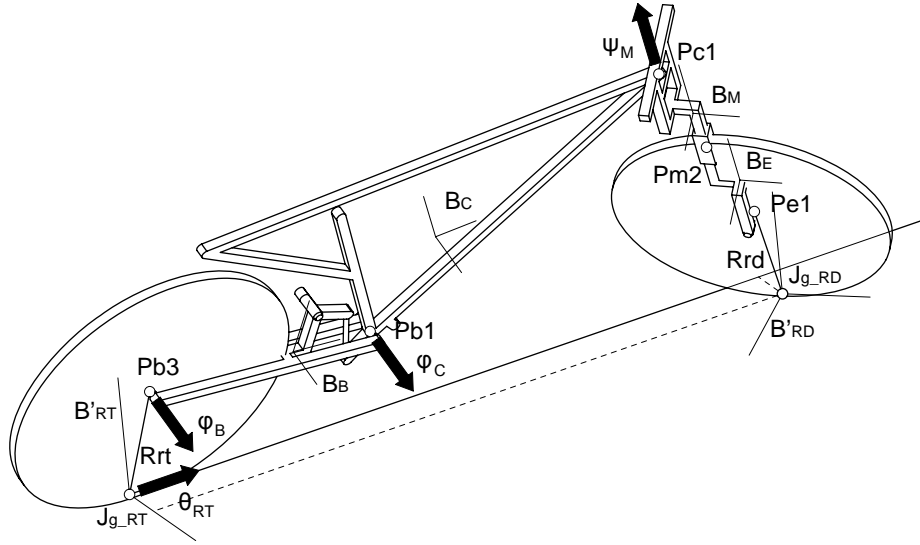


Fig. C.1 Puntos, bases y rotaciones significativas para la resolución con Mathematica de la geometría de la motocicleta.

La posición del punto J_{g_RD} respecto la de J_{g_RT} puede calcularse como:

$$\begin{aligned} \{\overline{J_{g_RT} J_{g_RD}}\}_{B'_{RT}} = & \{\overline{J_{g_RT} Pb3}\}_{B'_{RT}} + \{\overline{Pb3 Pb1}\}_{B'_{RT}} + \{\overline{Pb1 Pc1}\}_{B'_{RT}} + \\ & \{\overline{Pc1 Pm2}\}_{B'_{RT}} + \{\overline{Pm2 Pe1}\}_{B'_{RT}} + \{\overline{Pe1 J_{g_RD}}\}_{B'_{RT}} \end{aligned} \quad (C.2)$$

Los diferentes vectores correspondientes a distancias entre puntos que aparecen en la ecuación C.2 se pueden expresar en las bases adecuadas de la siguiente manera:

Distancia del punto de contacto geométrico trasero al punto de enlace entre Rueda Trasera y Basculante en la base B' .

$$\{\overline{J_{g_RT} Pb3}\}_{B'_{RT}} = \begin{Bmatrix} Rrt \cdot \sin \theta_{RT} \\ 0 \\ Rrt \cdot \cos \theta_{RT} \end{Bmatrix} \quad (C.3)$$

Distancia del punto de enlace entre Rueda Trasera y Basculante al punto de enlace entre Basculante y Chasis en la base del Basculante (B_B).

$$\{\overline{Pb3 Pb1}\}_{B_B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L_B \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (C.4)$$



Distancia del punto de enlace entre Basculante y Chasis al punto de enlace entre Chasis y Manillar en la base del Chasis (B_C).

$$\{\overline{\mathbf{Pb1Pc1}}\}_{B_C} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L_C \\ H_C \end{Bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Distancia del punto de enlace entre Chasis y Manillar al punto de enlace entre Manillar y Eje Delantero en la base del Manillar (B_M).

$$\{\overline{\mathbf{Pc1Pm1}}\}_{B_M} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -H_M \end{Bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Distancia del punto de enlace entre Manillar y Eje Delantero al punto de enlace entre Eje Delantero y Rueda Delantera en la base del Manillar (B_M).

$$\{\overline{\mathbf{Pm1Pe1}}\}_{B_M} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -H_E + d \end{Bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Las orientaciones de las bases de los diferentes sólidos que intervienen en esta cadena se pueden expresar de la siguiente manera:

La rotación de la base B_B (del Basculante) respecto a la base B'_{RT} depende del ángulo de inclinación de la Rueda Trasera y del giro del basculante respecto al versor 1 de la base B'_{RT} . Esta rotación se puede expresar según la siguiente matriz de cambio de base de B_B a B'_{RT} :

$$[S_{\theta_{RT}\varphi_B}] = \begin{bmatrix} \cos\theta_{RT} & 0 & \sin\theta_{RT} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_{RT} & 0 & \cos\theta_{RT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_B & -\sin\varphi_B \\ 0 & \sin\varphi_B & \cos\varphi_B \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

La rotación de la base B_C (del Chasis) respecto a la base B_B se expresa mediante la matriz de cambio de base de B_C a B_B :



$$[S_{\varphi_C}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_C & -\sin\varphi_C \\ 0 & \sin\varphi_C & \cos\varphi_C \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

La rotación de la base B_M (del Manillar) respecto a la base B_C se representa con la matriz de cambio de base de B_M a B_C

$$[S_{\psi_M}] = \begin{bmatrix} \cos\psi_M & \sin\psi_M & 0 \\ -\sin\psi_M & \cos\psi_M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Las bases asociadas al Manillar y al Eje Delantero (B_M y B_E) tienen la misma orientación.

Algunos de los vectores que intervienen en la cadena de la ecuación C.2 (Ec.C.4, C.5, C.6, C.7) se pueden expresar en la base B'_{RT} mediante las matrices de cambio de base descritas en C.8, C.9 y C.10 de la siguiente manera:

$$\{\overline{\mathbf{Pb3Pb1}}\}_{B'_{RT}} = [S_{\theta_{RT}\varphi_B}] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ L_B \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\{\overline{\mathbf{Pb1Pc1}}\}_{B'_{RT}} = [S_{\theta_{RT}\varphi_B}] \cdot [S_{\varphi_C}] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ L_C \\ H_C \end{Bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$\{\overline{\mathbf{Pc1Pm1}}\}_{B'_{RT}} = [S_{\theta_{RT}\varphi_B}] \cdot [S_{\varphi_C}] \cdot [S_{\psi_M}] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -H_M \end{Bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

$$\{\overline{\mathbf{Pm1Pe1}}\}_{B'_{RT}} = [S_{\theta_{RT}\varphi_B}] \cdot [S_{\varphi_C}] \cdot [S_{\psi_M}] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -H_E + d \end{Bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

Los diferentes vectores de las ecuaciones C.3, C.11, C.12, C.13 y C.14 dependen de: El ángulo θ_{RT} , que es una variable independiente cuyo valor es conocido. El ángulo φ_C , que es un parámetro de simulación de valor conocido. El ángulo ψ_M , variable independiente de valor conocido. Las distancias R_{RT} , L_B , L_C , H_C , H_M y H_E , que son parámetros geométricos cuyo



valor se conoce. La distancia d , que es un parámetro de la simulación de valor conocido. Y por último, de φ_B , que es una variable dependiente de valor desconocido.

Así pues, el vector en base B'_{RT} que posiciona el punto de enlace entre Rueda Delantera y Eje Delantero respecto al punto J_{g_RT} , suma de los vectores C.3, C.11, C.12, C.13 y C.14 puede expresarse en función del ángulo φ_B de rotación del basculante respecto al versor 1 de la base B'_{RT} . La ecuación C.2 se puede reescribir entonces como:

$$\{\overline{J_{g_RT}J_{g_RT}}\}_{B'_{RT}} = \{\overline{J_{g_RT}Pe1}\}_{B'_{RT}}(\varphi_B) + \{\overline{Pe1J_{g_RT}}\}_{B'_{RT}} \quad (C.15)$$

En esta ecuación, la orientación de la base B'_{RD} respecto a la base B'_{RT} es desconocida a priori y es necesario de calcular el vector que va del punto de enlace entre Eje Delantero y Rueda Delantera al punto J_{g_RD} .

Teniendo en cuenta que la rueda únicamente puede rotar respecto al versor 1 de la base asociada al Manillar, el vector normal a la circunferencia de la rueda siempre tiene la dirección de ese versor. Como la dirección de rodadura de la rueda es la intersección del plano suelo con el plano de la rueda, es posible obtener esta dirección en función de la orientación de la base B_M (Fig. C.2):

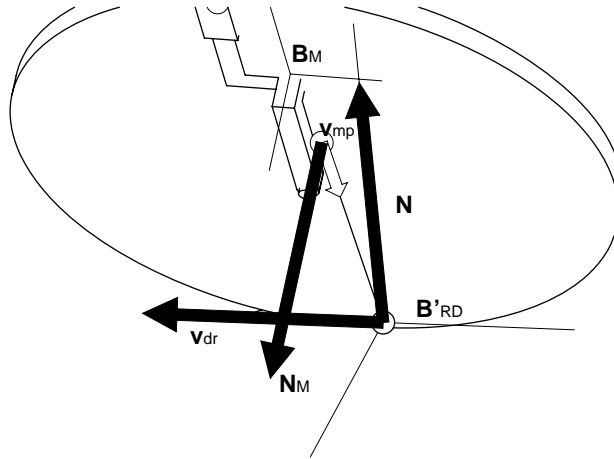


Fig. C.2 Vectores normales al suelo, al plano de la rueda, en la dirección de rodadura y en la del diámetro de máxima pendiente.

Se define el vector normal al suelo como:



$$\{\mathbf{N}\}_{B'_{RT}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

Y el versor 1 de la base asociada al manillar expresado en la base B'_{RT} como:

$$\{\mathbf{N}_M\}_{B'_{RT}}(\varphi_B) = [S_{\theta_{RT}\varphi_B}] \cdot [S_{\varphi_C}] \cdot [S_{\psi_M}] \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

La dirección de rodadura \mathbf{v}_{dr} de la Rueda Delantera expresada en la base B'_{RT} surge del producto vectorial entre los vectores C.16 y C.17:

$$\{\mathbf{v}_{dr}\}_{B'_{RT}}(\varphi_B) = \{\mathbf{N}_M\}_{B'_{RT}}(\varphi_B) \wedge \{\mathbf{N}\}_{B'_{RT}} \quad (\text{C.18})$$

Realizando ahora el producto vectorial entre la dirección de rodadura (Ec. C.18) y el versor 1 de la base asociada al manillar (Ec. C.17), se obtiene un vector cuya dirección es la misma que la del diámetro de máxima pendiente de la Rueda Delantera (\mathbf{v}_{mp}).

$$\{\mathbf{v}_{mp}\}_{B'_{RT}}(\varphi_B) = \{\mathbf{N}_M\}_{B'_{RT}}(\varphi_B) \wedge \{\mathbf{v}_{dr}\}_{B'_{RT}}(\varphi_B) \quad (\text{C.19})$$

Conociendo el valor del radio R_{rd} de la Rueda Delantera, se puede calcular el vector que une el punto $Pe1$ con el punto J_{g_RD} empleando el vector de la ecuación C.19:

$$\overline{\{\mathbf{Pe1}J_{g_RD}\}}_{B'_{RT}}(\varphi_B) = R_{rd} \cdot \frac{\{\mathbf{v}_{mp}\}_{B'_{RT}}(\varphi_B)}{\left| \{\mathbf{v}_{mp}\}_{B'_{RT}}(\varphi_B) \right|} \quad (\text{C.20})$$

Sustituyendo en la ecuación C.15 el vector de la ecuación C.20, obtenemos el vector de posición del punto de contacto geométrico delantero respecto al punto de contacto geométrico trasero en función del ángulo φ_B .

$$\overline{\{\mathbf{J}_{g_RT}J_{g_RT}\}}_{B'_{RT}} = \overline{\{\mathbf{J}_{g_RT}Pe1\}}_{B'_{RT}}(\varphi_B) + \overline{\{\mathbf{Pe1}J_{g_RT}\}}_{B'_{RT}}(\varphi_B) \quad (\text{C.21})$$

Igualando la tercera componente de este vector a 0, según indica la ecuación C.1 se obtiene una ecuación en función de φ_B que puede ser resuelta con *Visual Nastran*.



Para el modelo A, al no contar con los sólidos asociados al sistema de suspensión se reduce el número de vectores implicados en la ecuación C.2 y la ecuación final a resolver en *Mathematica* está en función del ángulo de orientación de la base B_C respecto al versor 1 de la base B'_{RT} .

C.2. Ecuaciones dinámicas

Para comprobar que las pruebas dinámicas que se llevan a cabo en *Visual Nastran* transcurren según el sistema mecánico en que está basado el modelo implementado, se resuelven numéricamente las ecuaciones diferenciales con el programa *Mathematica* y se comparan los valores de determinadas variables.

En las pruebas dinámicas llevadas a cabo con el modelo A la motocicleta está forzada a moverse en un plano, no puede ni inclinarse ni variar la orientación del Manillar respecto al Chasis. Este hecho facilita la comprobación dinámica al reducirla a un análisis en dos dimensiones.

Los sólidos que forman parte del sistema y las fuerzas que actúan sobre él, así como las posiciones de los puntos significativos pueden verse en la figura C.3.

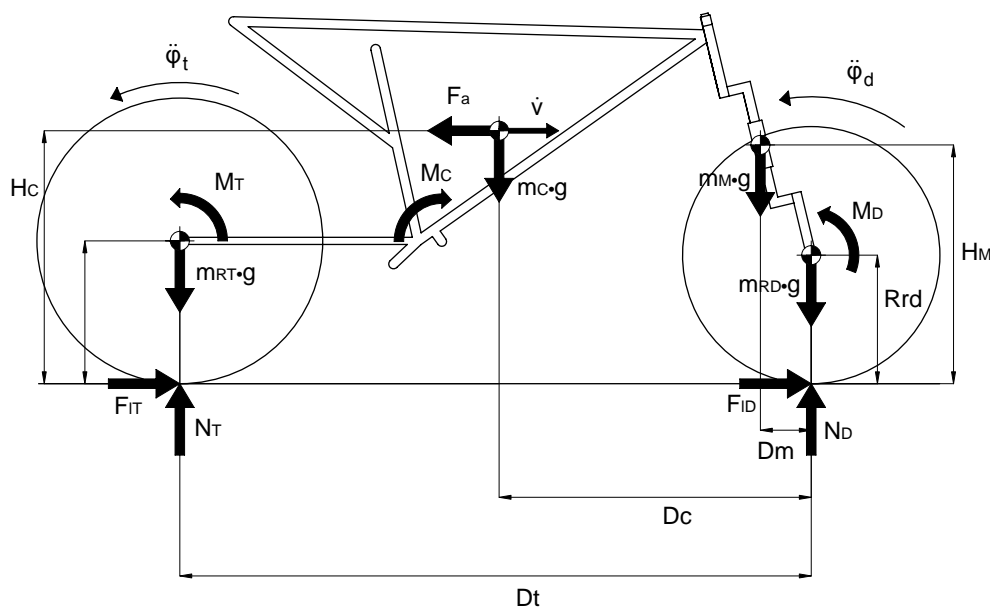


Fig. C.3 Fuerzas, momentos, aceleraciones y posiciones significativas en la resolución del sistema dinámico de una motocicleta.



Sobre el sistema actúan la fuerza aerodinámica \mathbf{F}_a , el peso (masa de cada sólido multiplicada por g), la fuerza de contacto normal trasera y delantera (\mathbf{N}_T y \mathbf{N}_D), la fuerza longitudinal de rozamiento en los neumáticos trasera y delantera (\mathbf{F}_{IT} y \mathbf{F}_{ID}) y los momentos sobre las ruedas delantera y trasera y sobre el chasis (\mathbf{M}_T , \mathbf{M}_D y \mathbf{M}_C).

Aplicando los teoremas de la cantidad de movimiento (TCM) y del momento cinético (TMC) se puede obtener un sistema de ecuaciones diferenciales para las aceleraciones angulares de las ruedas y la aceleración del sistema.

Aplicando el TCM en la dirección horizontal se obtiene la siguiente ecuación:

$$\sum \mathbf{F}_x = \mathbf{F}_{IT} + \mathbf{F}_{ID} - \mathbf{F}_a - (m_{RT} + m_{RD} + m_C + m_M) \cdot \dot{v} = 0 \quad (\text{C.22})$$

Y Aplicando el TMC en las ruedas, en su centro de inercia, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\sum \mathbf{M}(G_{RT}) = R_{rt} \cdot \mathbf{F}_{IT} + \mathbf{M}_T - I_{RT} \cdot \ddot{\phi}_t = 0 \quad (\text{C.23})$$

$$\sum \mathbf{M}(G_{RD}) = R_{rd} \cdot \mathbf{F}_{ID} + \mathbf{M}_D - I_{RD} \cdot \ddot{\phi}_D = 0 \quad (\text{C.24})$$

Estas tres ecuaciones, son las ecuaciones diferenciales que se han de resolver numericamente en *Mathematica*. Los términos que las forman están relacionados entre ellos según:

La fuerza aerodinámica es función de un coeficiente k_a y de la velocidad v (Ec. C.25)

$$\mathbf{F}_a = k_a \cdot v^2 \cdot \text{sign}(v) \quad (\text{C.25})$$

El momento aplicado sobre la rueda trasera \mathbf{M}_T es igual al par motriz aplicado sobre la rueda trasera Γ_{RT} y al par de frenada que actúa sobre ella, que depende de un coeficiente de freno y de la velocidad de rotación de la rueda (Ec. C.26).

$$\mathbf{M}_T = -\mu_f \cdot \dot{\phi}_t \cdot \text{sign}(\dot{\phi}_t) - \Gamma_{RT} \quad (\text{C.26})$$

Sobre la rueda delantera, el unico momento que actúa es el de frenada (Ec. C.27).



$$\mathbf{M}_D = -\mu_f \cdot \dot{\phi}_d \cdot \text{sign}(\dot{\phi}_d) \quad (\text{C.27})$$

Las fuerzas sobre las ruedas debidas al rozamiento dependen de un coeficiente de rozamiento μ_c , del deslizamiento entre la superficie del neumático y la del suelo y del valor de la normal que actúa sobre esa rueda. Estas fuerzas \mathbf{F}_{IT} y \mathbf{F}_{ID} tienen la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_{IT} = \mu_c \cdot s(v, \dot{\phi}_T) \cdot \mathbf{N}_T \quad (\text{C.28})$$

$$\mathbf{F}_{ID} = \mu_c \cdot s(v, \dot{\phi}_D) \cdot \mathbf{N}_D \quad (\text{C.29})$$

Ecuaciones en las que la función deslizamiento s tiene la siguiente forma:

$$s(v, \dot{\phi}) = \begin{cases} \text{sign}(v) = \text{sign}(\dot{\phi}) \rightarrow s = -\text{sign}(v) \\ \text{sign}(v) \neq \text{sign}(\dot{\phi}) \rightarrow \begin{cases} |\mathbf{R} \cdot \dot{\phi}| > |v| \rightarrow s = -\frac{|\mathbf{R} \cdot \dot{\phi}| - |v|}{|\mathbf{R} \cdot \dot{\phi}|} \cdot \text{sign}(\dot{\phi}) \\ |\mathbf{R} \cdot \dot{\phi}| \leq |v| \rightarrow s = -\frac{|v| - |\mathbf{R} \cdot \dot{\phi}|}{|v|} \cdot \text{sign}(v) \end{cases} \end{cases} \quad (\text{C.30})$$

Aplicando el TCM en la dirección vertical se obtiene una ecuación que relaciona las fuerzas normales (Ec. C.31).

$$\sum \mathbf{F}_Y = \mathbf{N}_T + \mathbf{N}_D - (m_{RT} + m_{RD} + m_C + m_M) \cdot g = 0 \quad (\text{C.31})$$

De la aplicación del TMC en el conjunto de Chasis y Manillar en el punto de enlace entre Manillar y Rueda Delantera resulta la ecuación que falta para poder resolver este sistema de ecuaciones diferenciales (Ec. C.32).

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}(G_{RD}) = & \mathbf{F}_a \cdot (H_C - R_{rd}) + (m_C \cdot (H_C - R_{rd}) + m_M \cdot (H_M - R_{rd}) + m_{RT} \cdot (R_{rt} - R_{rd})) \cdot \dot{v} \\ & + (m_C \cdot D_C + m_M \cdot D_M + m_{RT} \cdot D_t) \cdot g - \mathbf{N}_T \cdot D_T - \mathbf{M}_C - \mathbf{F}_{IT} \cdot (R_{rt} - R_{rd}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

Una vez introducidas las ecuaciones diferenciales en el programa *Mathematica*, se asignan valores iniciales a la velocidad lineal y a las angulares de las ruedas y el programa las resuelve obteniendo funciones de interpolación para los valores que se considere oportuno.

